3 Differenzierbarkeit

---

3 Termbildungen

$f(x) = 2x^2 - 3x$ und $x_0 = 2$

a) $f(3) = 2{\cdot}3^2 - 3{\cdot}3 = 9$ b) $f(0{,}5) = 2{\cdot}0{,}5^2 - 3{\cdot}0{,}5 = -1$ c) $f(a) = 2a^2 - 3a$

d) $f(r+2) = 2{\cdot}(r+2)^2 - 3{\cdot}(r+2) = 2{\cdot}(r^2+4r+4) - 3r - 6 = 2r^2 + 5r + 2$

e) $f(2+h) = 2{\cdot}(2+h)^2 - 3{\cdot}(2+h) = 2 + 5h + 2h^2$

f) $f(x) - f(2) = 2x^2 - 3x - 2$

g) $f(2+h) - f(2) = 2 + 5h + h^2 - (2{\cdot}2^2 - 3{\cdot}2) = 5h + h^2$

h) $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = 2x + 1$

i) $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{5h + h^2}{h} = 5 + h$

$f(x) = \dfrac{6}{x}$ und $x_0 = -1$

a) $f(3) = 2$ b) $f(0{,}5) = 12$ c) $f(a) = \dfrac{6}{a}$ d) $f(r+2) = \dfrac{6}{r+2}$

e) $f(-1+h) = \dfrac{6}{-1+h} = \dfrac{6}{h-1}$ f) $f(x) - f(-1) = \dfrac{6}{x} + 6$

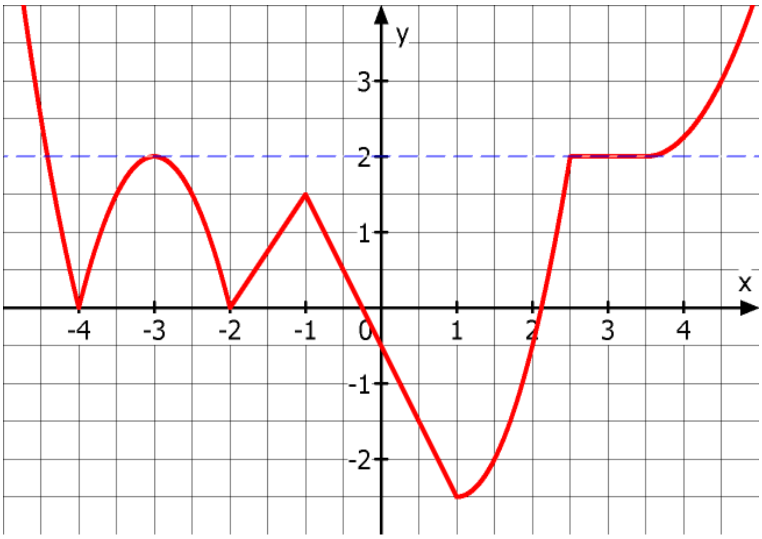
g) $f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{1}{-1+h} + 6 = \dfrac{1}{h-1} + 6$

h) $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{\frac{6}{x} + 6}{x+1} = \dfrac{6 + 6x}{(x+1){\cdot}x} = \dfrac{6{\cdot}(x+1)}{(x+1){\cdot}x} = \dfrac{6}{x}$

i) $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{\frac{6}{-1+h} + 6}{h} = = \dfrac{6 + 6{\cdot}(-1+h)}{h{\cdot}(1-h)} = \dfrac{6h}{h{\cdot}(-1+h)} = \dfrac{6}{h-1}$

---

4 Waagrechte Tangenten und Nichtdifferenzierbarkeit



a) Waagrechte Tangenten bei $x = -3$ und für $2{,}5 < x \leq 3{,}5$

Beachte:

Eine lineare Funktion, deren Graph eine Gerade ist, ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar und ihr Graph ist in jedem Punkt auch ihre Tangente.

b) Nichtdifferenzierbarkeitsstellen sind $x = -4;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2{,}5.$

In jeder dieser Stellen existieren links- und rechtsseitige Ableitung, sind aber nicht gleich.

---

5. Bestimmung von Differentialquotienten

a) $f(x) = 2x^2$

$x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = f(4) = 2 \cdot 4^2 = 32$

Differenzenquotient:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x^2 - 32}{x - 4}$$

Differentialquotient:

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{2x^2 - 32}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{2 \cdot (x^2 - 16)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} 2 \cdot (x + 4) = 16$$

Rechtsseitige Ableitung:

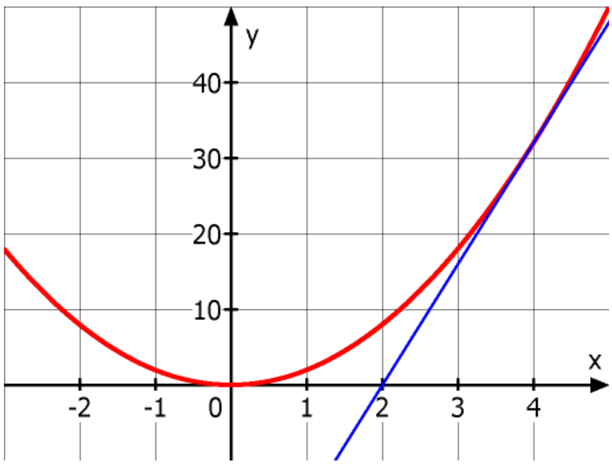
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cdot(4+h)^2-32}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cdot(16+8h+h^2)-32}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{32+16h+2h^2-32}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot(16+2h)}{h} = \lim_{h \to 0} (16+2h) = 16$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4-h)-f(4)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cdot(4-h)^2-32}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cdot(16-8h+h^2)-32}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{32-16h+2h^2-32}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h\cdot(16-2h)}{-h} = \lim_{h \to 0} (16-2h) = 16$$



---

b) $f(x) = \frac{6}{x}$

$$x_0 = -2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = f(-2) = \frac{6}{-2} = -3$$

Differenzenquotient:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{6}{x}+3}{x+2}$$

Differentialquotient:

$$f'(2) = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{6}{x}+3}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(\frac{6}{x}+3)\cdot x}{(x+2)\cdot x} = \lim_{x \to -2} \frac{6+3x}{(x+2)\cdot x} = \lim_{x \to -2} \left[\frac{3\cdot(2+x)}{(2+x)\cdot x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -2} \left[\frac{3}{x} \right] = -\frac{3}{2}$$

Rechtsseitige Ableitung:

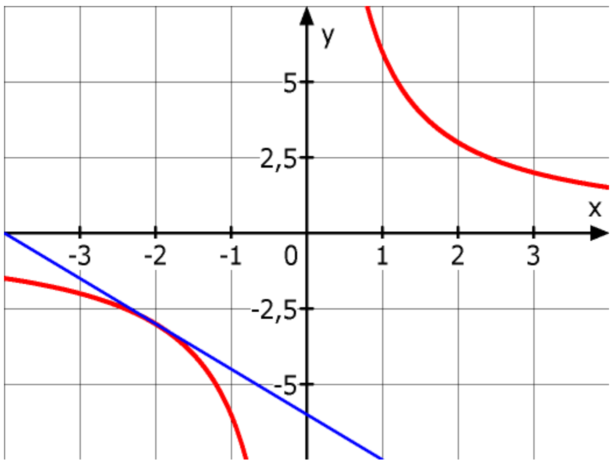
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6}{-2+h} + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{6}{-2+h} + 3) \cdot (-2+h)}{h \cdot (-2+h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 - 6 + 3h}{h \cdot (-2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h \cdot (-2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{-2+h} = -\frac{3}{2}$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2-h) - f(4)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6}{-2-h} + 3}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{6}{-2-h} + 3) \cdot (-2-h)}{-h \cdot (-2+h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 - 6 - 3h}{-h \cdot (-2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{-h \cdot (-2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{-2-h} = -\frac{3}{2}$$



---

c) $f(x) = x^2 + 6x$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 2^2 + 6 \cdot 2 = 16$

Differenzenquotient:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2}$$

Differentialquotient:

$$f'(2) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to} \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} \overset{\text{Faktorisierung}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+8)}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 2} \left[x + 8 \right] = 10$$

Rechtsseitige Ableitung:

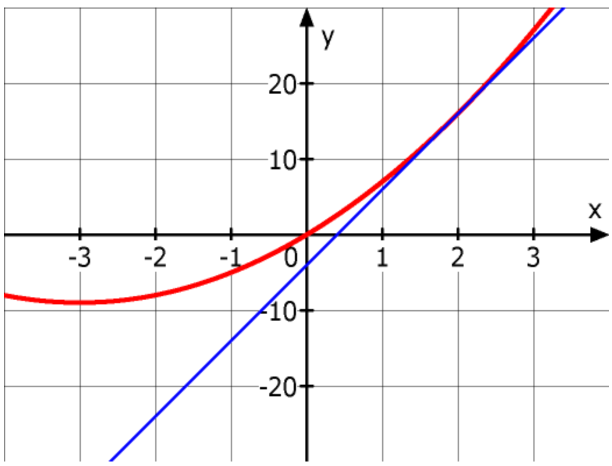
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + 6 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 12 + 6h - 16}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (10+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (10+h) = 10$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2-h)^2 + 6 \cdot (2-h) - 16}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 12 - 6h - 16}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-10h + h^2}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h \cdot (10-h)}{-h} = \lim_{h \to 0} (10-h) = 10$$



---

d) $f(x) = x^2 - x + 2$

$$x_0 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = f(\tfrac{4}{3}) = (\tfrac{4}{3})^2 - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{22}{9}$$

Differenzenquotient:

$$\frac{f(x) - f(\frac{4}{3})}{x - \frac{4}{3}} = \frac{x^2 - x + 2 - \frac{22}{9}}{x - \frac{4}{3}} = \frac{x^2 - x - \frac{4}{9}}{x - \frac{4}{3}}$$

Differentialquotient:

$$f'(\tfrac{4}{3}) = \lim_{x \to \frac{4}{3}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to \frac{4}{3}} \frac{x^2 - x - \frac{4}{9}}{x - \frac{4}{3}} \overset{\text{Fakorisierung}}{=} \lim_{x \to \frac{4}{3}} \frac{(x+\frac{1}{3})\cdot(x-\frac{4}{3})}{x-\frac{4}{3}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{4}{3}} \left[x + \frac{1}{3}\right] = \frac{5}{3}$$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{4}{3}+h)-f(\frac{4}{3})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{4}{3}+h)^2-(\frac{4}{3}+h)+2-\frac{22}{9}}{h} =$$

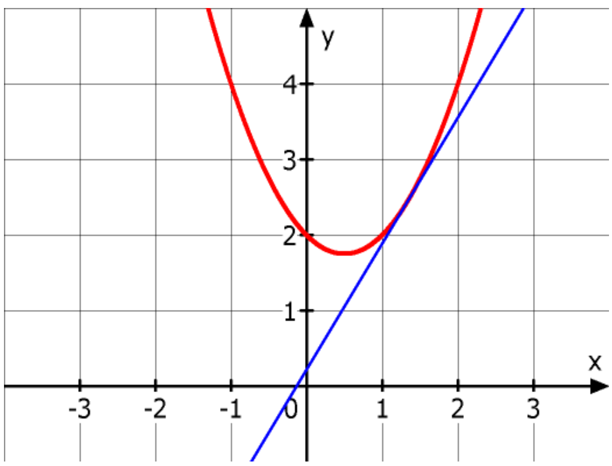
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{16}{9}+\frac{8}{3}h+h^2-\frac{4}{3}-h-\frac{22}{9}}{h} = = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5}{3}h+h^2}{h} = = \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot(\frac{5}{3}+h)}{h} = \frac{5}{3}$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{4}{3}-h)-f(\frac{4}{3})}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{4}{3}-h)^2-(\frac{4}{3}-h)+2-\frac{22}{9}}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{16}{9}-\frac{8}{3}h+h^2- +h-\frac{22}{9}}{-h} = = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{5}{3}h+h^2}{-h} = = \lim_{h \to 0} \frac{-h\cdot(\frac{5}{3}-h)}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (\frac{5}{3}-h) = \frac{5}{3}$$



----

e) $f(x) = x^3 - 2x^2$

$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 1^3 - 2\cdot 1^3 = 1 - 2 = -1$

Differenzenquotient:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^3-2x^2+1}{x-1}$$

Differentialquotient:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x-1} \overset{\text{Polynomdivision}}{=} \lim_{x\to 1}\left[x^2-x-1\right] = -1$$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-2\cdot(1+h)^2+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2\cdot[(1+h)-2]+1}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2\cdot(-1+h)+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)\cdot(h^2-1)+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-1+h^3-h+1}{h} =$$

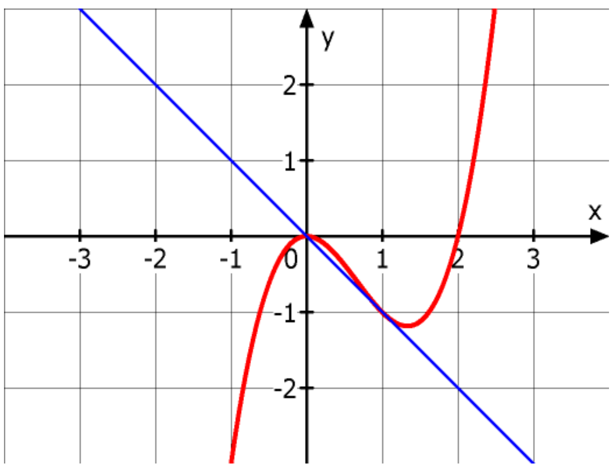
$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2-h+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h-1+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h-1+h^2) = -1$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^3-2\cdot(1-h)^2+1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2\cdot[(1-h)-2]+1}{-h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2\cdot(-1-h)+1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)\cdot(h^2-1)+1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-1-h^3+h+1}{-h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h-h^3}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot(-h-1+h^2)}{-h} = \lim_{h\to 0}(-h-1+h^2) = -1$$



Beachte:

Eine Tangente kann den Graphen einer Funktion durchaus noch in einem anderen Punkt schneiden.

---

6 Lokale Änderungsrate

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ und $x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = \frac{3}{2}$

Differenzenquotient bzw. mittlere Änderungsrate:

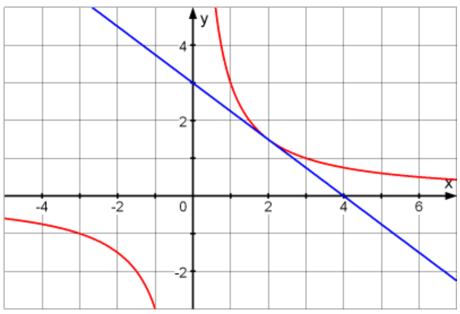
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{2}}{x - 2}$$

Differentiaquotient bzw. lokale Änderungsrate:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{6 - 3x}{(x-2) \cdot 2x} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{-3 \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot 2x}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{-3}{2x}\right) = -\frac{3}{4}$$

b) Tangentengleichung:

$$y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2) + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} x + 3$$



---

7 Differenzierbarkeit

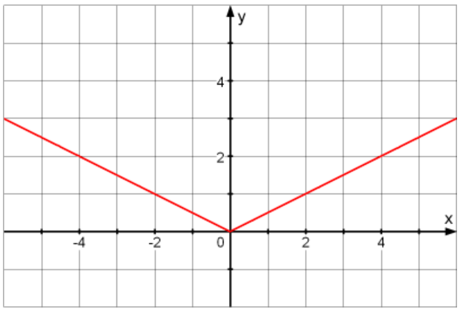
a) $f: x \to 0{,}5\cdot|x| = \begin{cases} -0{,}5x & x<0 \\ 0{,}5x & x \geq 0 \end{cases}$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5(0+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5h}{h} = \lim_{h\to 0} 0{,}5 = 0{,}5$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-0{,}5(0-h)-0}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5h}{-h} = \lim_{h\to 0} (-0{,}5) = -0{,}5$$



Die Funktion ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

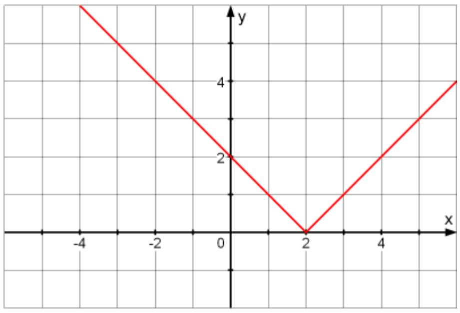
b) $f: x \to |x-2| = \begin{cases} -(x-2), & x<2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(2+h)-2]-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-[(2-h)-2]-0}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$



Die Funktion ist in $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.

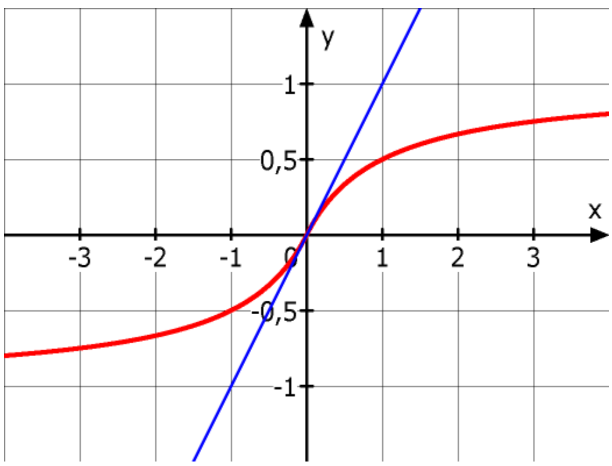
c) $f : x \to \dfrac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{-x+1}, & x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+h}{0+h+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{h+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h+1} = 1$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0-h}{(0-h)+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{-h+1}}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-h+1} = 1$$



Die Funktion ist in $x_0 = 0$differenzierbar.

8 Tangenten- und Normalengleichung

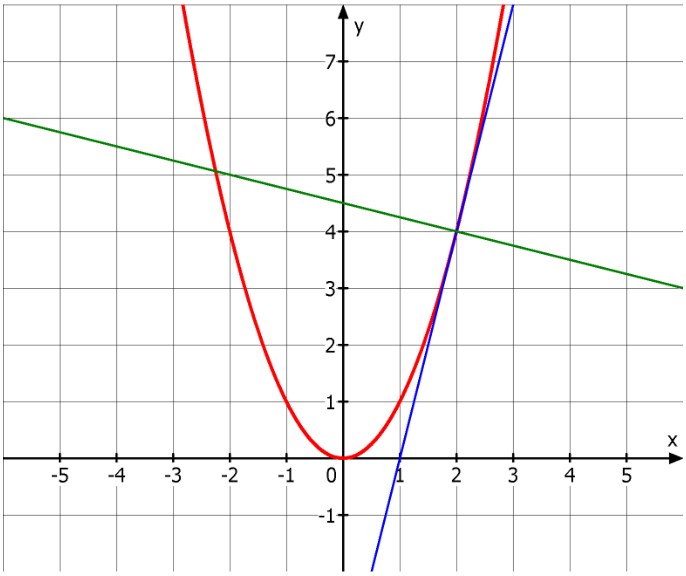
---

a) $f : x \to x^2$ und $P_0\left(2 \mid 4\right)$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Tangente: $y = 4 \cdot (x - 2) + 4 = 4x - 4$

Normale : $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$



Schnittwinkel der Tangente mit der positiven x-Achse: $\tan\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 76°$

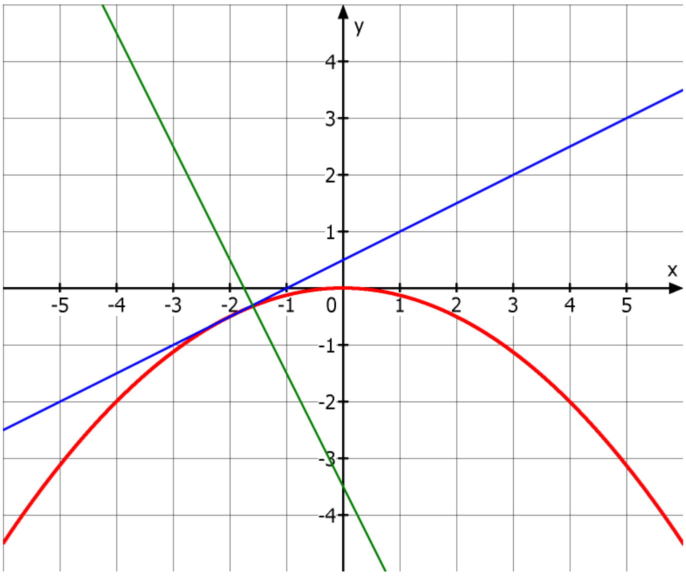
---

b) $f : x \to -0{,}125x^2$ und $P_0\left(-2 \mid -0{,}5\right)$ **Korrektur!**

$$f'(-2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{-0{,}125 \cdot x^2 - 0{,}5}{x + 2} = \lim_{x \to -2} [-0{,}125 \cdot (x - 2) = \frac{1}{2}$$

Tangente: $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Normale: $y = -2x - \frac{7}{2}$



Schnittwinkel der Tangente mit der positiven x-Achse : $\tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 26{,}6°$

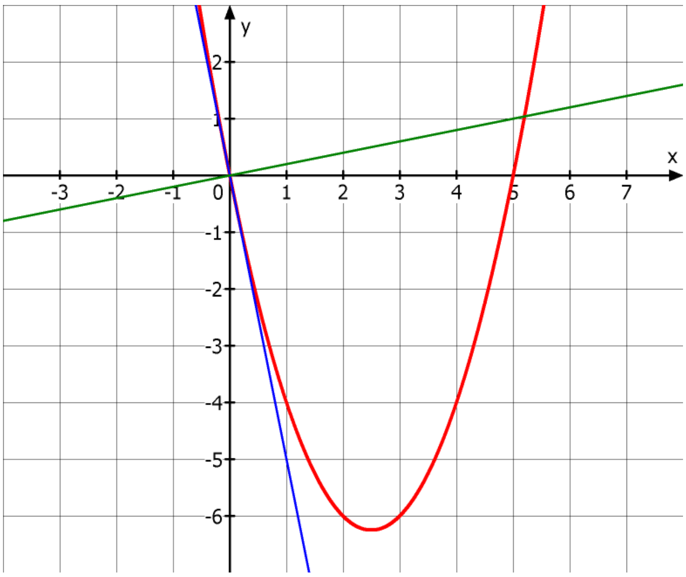
---

c) $f : x \to x^2 - 5x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 5$ und $P_0\left(0 | 0\right)$

$$f'(2) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 0} (x - 5) = -3$$

Tangente : $y = -5 \cdot (x - 0) + 0 = -5x$

Normale: $y = \frac{1}{5} \cdot (x - 0) + 0 = \frac{1}{5}x$



Schnittwinkel der Tangente mit der positiven x-Achse:

$\tan\alpha^* = -5 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* \approx -78{,}7° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 101{,}3°$

---

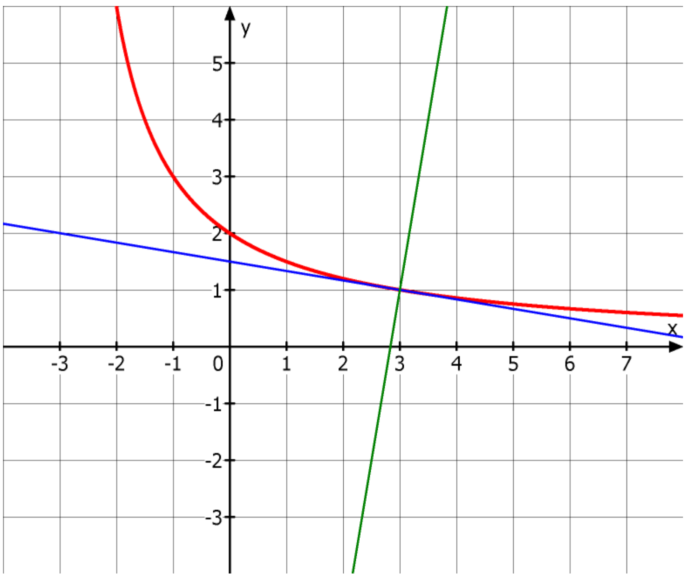
d) $f : x \rightarrow \dfrac{6}{x+3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{6}{(x+3)^2}$ und $P_0(3 \mid 1)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{6}{x+3}-1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{6-1\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{(x-3)\cdot(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x+3)} = -\frac{1}{6}$$

Tangente: $y = -\frac{1}{6}\cdot(x-3)+1 = -\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

Normale: $y = 6\cdot(x-3)+1 = -6x+17$



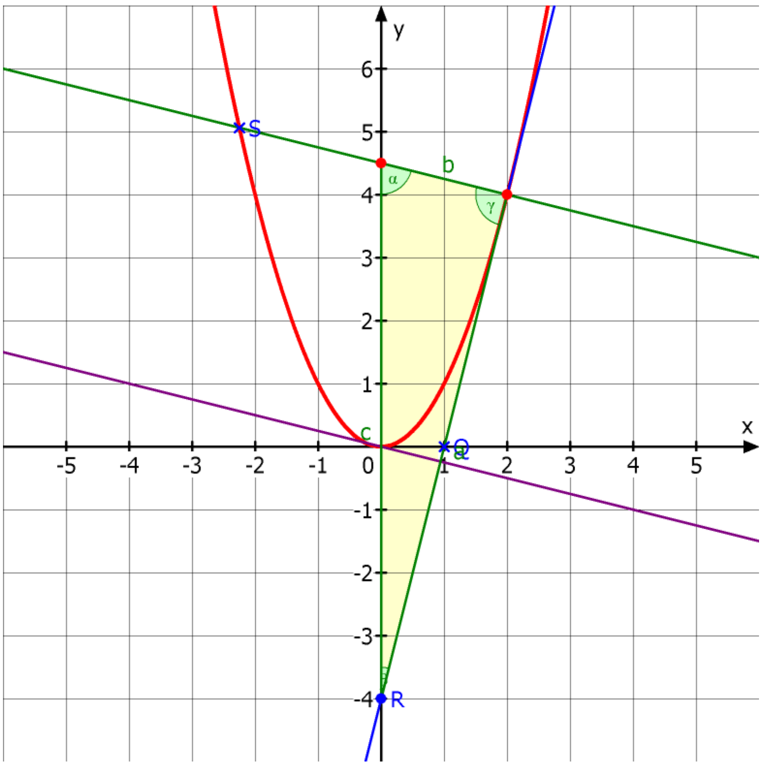
Schnittwinkel der Tangente mit der poitiven x-Achse:

$\tan\alpha* = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx -9{,}5° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 170{,}5°$

---

9 Normalparabel

a)



b) $\tan\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(4) \approx 76°$

c) Schnittpunkt mit der x-Achse: $4x-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad Q\left(1 \mid 0\right)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $R\left(0 \mid 4\right)$

$\overline{QR} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$

d) Lot von $\left(0 \mid 0\right)$ auf die Tangente: $y = -\frac{1}{4}\cdot(x-0>)+0 = -\frac{1}{4}x$

Schnittpunkt S dieses Lotes mit der Tangente:

$-\frac{1}{4}x = 4x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{17} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{17} = -\frac{4}{17}$

$\overline{OS} = \sqrt{(\frac{16}{17})^2+(-\frac{4}{17})^2} = \frac{4}{17}\sqrt{17}$

e) Gleichung der Normalen: $n \;: y = -\frac{1}{4}(x-2)+4 = -\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

f) Schnittbedingung: $x^2 = -\frac{1}{4}x+\frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -\frac{9}{4}$

$f(-\frac{9}{4}) = \frac{81}{16}$ ergibt $S\left(-\frac{9}{4} \mid \frac{81}{16}\right)$

g) $A = \frac{1}{2}\cdot(4+\frac{9}{2})\cdot 2 = 8{,}5$

vgl. auch Aufgabe 12. a)

---

10 Rennstrecke

Differentialquotient an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(4-\frac{1}{2}x^2)-(4-\frac{1}{2}x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x_0^2}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-\frac{1}{2}\cdot(x^2-x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} [-\frac{1}{2}(x+x_0)] = -x_0$$

Ansatz für die Tangentengleichung im Punkt $B\left(x_0 \mid 4-\frac{1}{2}x_0^2\right)$:

$$y = -x_0\cdot(x-x_0)+4-\frac{1}{2}x_0^2$$

Punkt eingesetzt : $6 = -x_0\cdot(0-x_0)+4-0{,}5x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -2 \vee x_0 = 2$

Das Auto hat die Bahn im Punkt $B\left(-2 \mid 2\right)$ verlassen.

---

11 Unendliche lokale Änderungsrate

$$g : x \to \begin{cases} -(x-1)^2+4\,, & x \le 2 \\ (x-3)^2+1\,, & x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 2+0} g(x) = 2$ und $\lim\limits_{x \to 2-0} g(x) = 3$

b) $$\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)-3]^2+1-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[h-1]^2-2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2-2h-1}{h} = -\infty$$

g ist für $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.

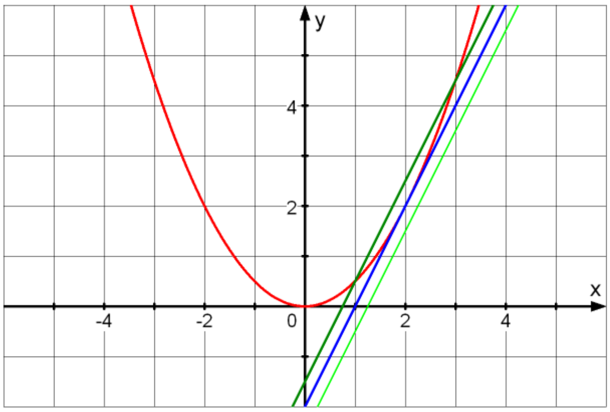
---

12 Allgemeine Tangenten und Normalengleichung

Wurde im Unterricht behandelt.

---

13 Berühreigenschaft der Tangente



$f : x \to 0{,}5x^2$ und $g_r : y = 2x + r$

a) Schnittbedingung : $0{,}5x^2 = 2x + r \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5x^2 - 2x - r = 0$

Bedingung für einen gemeinsamen Punkt :

Berührung: $D = 2^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -2$

b) $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{0{,}5x^2 - 0{,}5 \cdot 2^2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{0{,}5x^2 - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{0{,}5 \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} =$

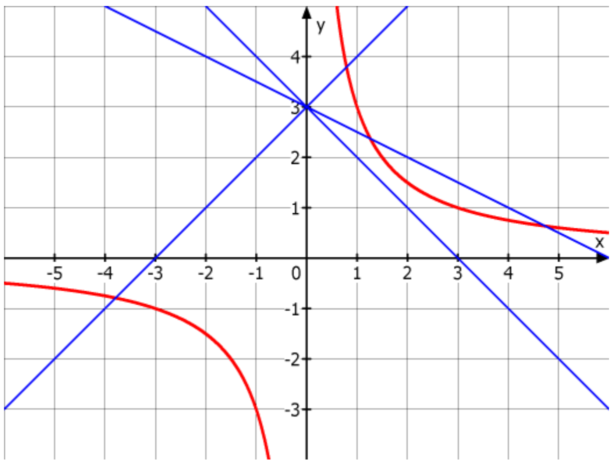
$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{0{,}5 \cdot (x-2) \cdot (x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} [0{,}5 \cdot (x+2)] = 2$

Gleichung der Tangente: $y = 2 \cdot (x-2) + 2 = 2x - 2$

---

14 Eigenschaft der Tangente

a)



b) Schnittbedingung : $\frac{3}{x} = mx + 3 \quad \Leftrightarrow \quad mx^2 + 3x - 3 = 0$

Bedingung für zwei Schnittpunkte:

$D = 3^2 + 4 \cdot 3m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -12m > -9 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{3}{4}$

Damit es zwei Schnittpunkte gibt, muss m größer $-\frac{3}{4}$ sein.

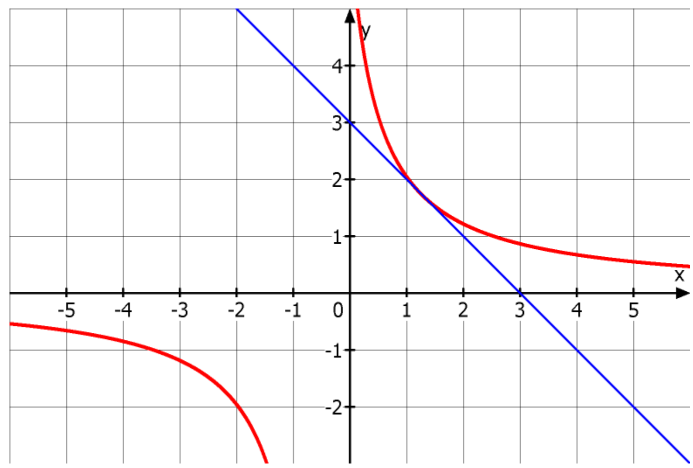
c) Gleichung der Funktion k , deren Graph durch aus dem Graphen von h durch Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ hervorgeht: $k(x) = \frac{3}{x-a}$

Schnittbedingung:

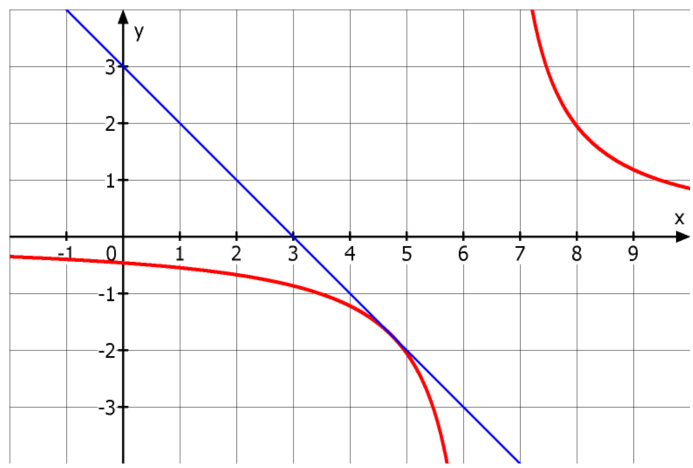
$\frac{3}{x-a} = -x + 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = -x^2 + 3x + ax - 3a \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x \cdot (-3 - a) + 3a + 3 = 0$

Bedingung für einen einzigen Schnittpunkt:

$(-a-3)^2 - 4 \cdot (3a+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 6a - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3 - 2\sqrt{3} \ \vee \ a = 3 + 2\sqrt{3}$



Die Gerade $y = -x+3$ und der Graph der Funktion $f: x \to \dfrac{1}{x-3+2\sqrt{3}}$



Die Gerade $y = -x+3$ und der Graph der Funktion $f: x \to \dfrac{1}{x-3-2\sqrt{3}}$

G 15 Potenzen mit rationalen Exponenten

$$\sqrt[6]{\frac{c^{\frac{4}{3}}}{d^3}} \cdot \frac{\sqrt[18]{d^7}}{c^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{d^2}{\sqrt[3]{d^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{d^4}{c^2}} = \frac{c^8}{d^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^{\frac{7}{18}}}{c^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{d^2}{d^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{d^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} = c^{\frac{13}{2}} \cdot d^{\frac{23}{9}}$$
