II. 2 Differentialquotient und lokale Änderungrate

==

2 Berechnung der lokalen Änderungsrate mit Hilfe einer Tabelle

a) $f(x)) = 0{,}25x^2 - 2$

x	2,5	2,9	2,99	3,01	3,1	3,5
$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$	1,375	1,475	1,4975	1,5025	1,525	1,625

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{0{,}25x^2 - 2 - 0{,}25}{x - 3} = \frac{0{,}25x^2 - 2{,}25}{x - 3} = \frac{0{,}25\cdot(x^2 - 9)}{x - 3} = 0{,}25\cdot(x + 3)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \left[0{,}25\cdot(x + 3)\right] = 1{,}5$$

b) $g(x) = x - 0{,}1x^3$

x	2,5	2,9	2,99	3,01	3,1	3,5
$\frac{g(x) - f(3)}{x - 3}$	-1,275	-1,611	-1,691009999	-1,709010001	-1,791	-2,175

$$\frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \frac{x - 0{,}1x^3 - 0{,}3}{x - 3} = -0{,}1\cdot\frac{x^3 - 10x - 3}{x - 3} = -0{,}1\cdot(x^2 + 3x - 1)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \left[-0{,}1\cdot(x^2 + 3x - 1)\right] = -1{,}7$$

c) $k(x) = 3x + 2 - x = 2x + 2$

Die mittlere Änderungsraten und die lokale Änderungsrate sind gleich 2.

d)

x	2,5	2,9	2,99	3,01	3,1	3,5
$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$	2,343145750	2,678680338	2,63001823	2,782220021	2,870938501	3,313708498

e) $r(x) = x^2 - (2 + x^2) = -2$

Die mittlere Änderungsraten und die lokale Änderungsrate sind gleich 0.

f)

x	2,5	2,9	2,99	3,01	3,1	3,5
$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$	-0.9147042720	-0.9812932115	-0.9892704031	-0.9906815908	-0.9953934562,	-0.9838064714

3 Momentangeschwindigkeit

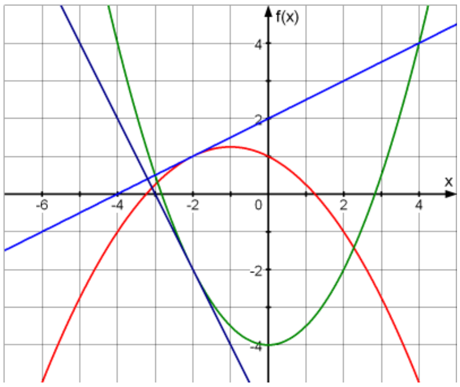
Mittlere Geschwindigkeit : $\frac{s(t)\ -\ s(1)}{t-1}\ =\ \frac{2t^2-2}{t-1}\ =\ 2\cdot(t+1)$

Momtangeschwindigkeit : $v(1)\ =\ \lim\limits_{t\to 1}\left[2\cdot(t+1)\right]\ =\ 4$

Analog : $v(2)\ =\ 8$ und $v(3)\ =\ 12$

4.

a)



b) Einzeichnen der Tangenten

c) $y\ =\ 0{,}5x+2$ und $y\ =\ -2x-6$

d) Die beiden Tangenten stehen aufeinander senkrecht. Das Produkt ihrer Steigungen ist gleich -1.

---

5 Lokale Änderungsraten bzw. Tangentensteigung

x	-2	-1	0	1	2
Steigung	-3,9 G	0,6	1,2	0,6	

---

6 Größe und Einheit → Änderungsrate und Einheit

Wassermenge W(t) eines Auffangbeckens	m^3	Volumenänderung	$\frac{m^3}{s}$
Länge L(t) einer Pflanze	m	Wachstumsgeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
Konzentration K(t) eines Medikaments	$\frac{mg}{l}$	Konzentrationsänderung	$\frac{mg}{l\cdot h}$
Höhe h(x)	m	Steigng bzw. Gefälle	keine
Geschwindigkeit v(t)	$\frac{m}{s}$	Beschleunigung	$\frac{m}{s^2}$

7 Mittlere und lokale Änderungsrate

Beispiel: Autofahrt auf gerader Strecke

s: $t \rightarrow s(t)$

mittlere Änderungsrate	lokale Änderungsrate
mittlere Geschwindigkeit	Momentantgeschwindigkeit

usw

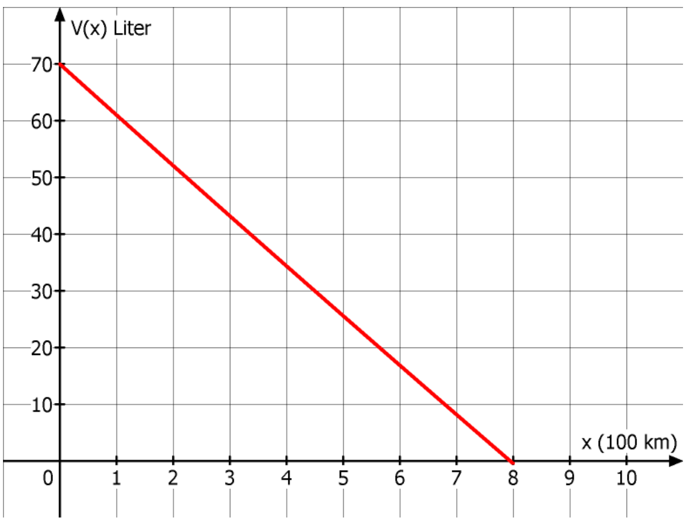
---

8 Benzinvorrat

$V(x) = 90 - 20 \cdot \cos(\frac{x}{20}) - 9x$

a) $V(0) = 90 - 20 = 70$

b)



Der Wagen kann ungefähr 800 km fahren.

c) Die Änderungraten sind beide ungefähr 6,9 $\frac{\text{Liter}}{100\text{ km}}$

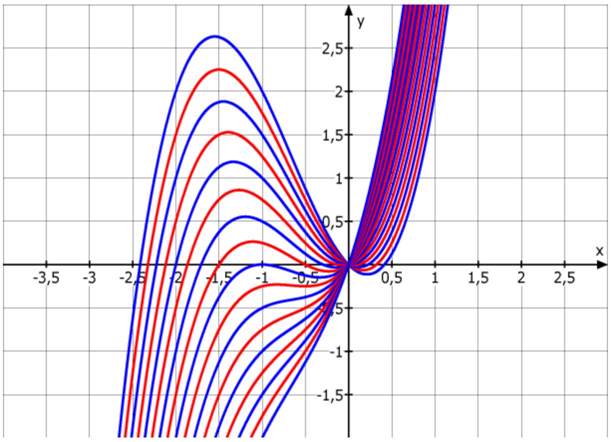
b)
9 Parameter

a) $g_{-4}(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

$$\frac{g_{-4}(x) - g_{-4}(2)}{x+2} = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1 - 1}{x+2} = \frac{x^3 + 2x^2}{x+2} = \frac{x^2 \cdot (x+2)}{x+2} = x^2$$

$$\lim_{x \to -2} x^2 = 4$$

b)

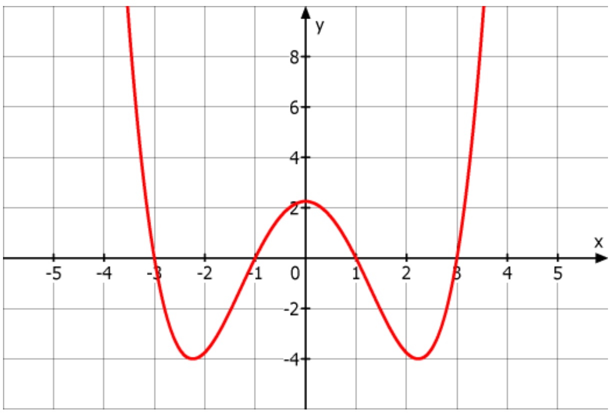


Für $a \leq \frac{4}{3}$ besitzt g_a mit Stellen, an denen die lokale Änderugsrate Null ist.

---

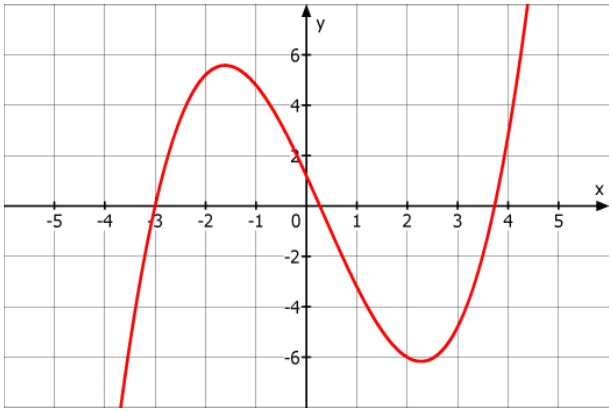
10 Verschwindende Änderungsrate

a) $f(x) = 0{,}25 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 9)$ mit den Nullstellen $-3;\ -1;\ 1;\ 3$



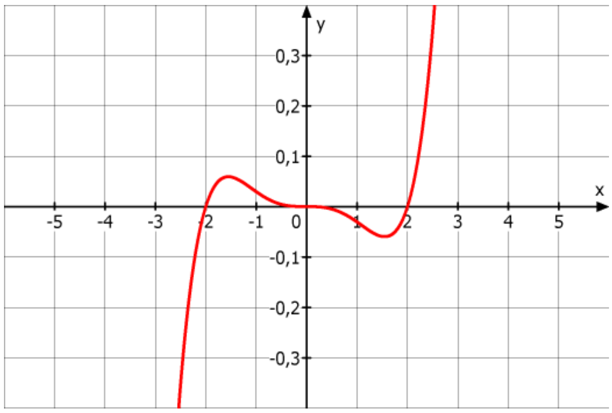
f hat drei Stllen mit der lokalen Änderungsrate Null.

b) $f(x) = 0{,}4 \cdot (x^2 - 4x + 1) \cdot (x+3) - 3;\ 2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}$



f hat zwei Stellen mit der lokalen Änderungsrate Null.

c) $f(x) = 0{,}01x^2 \cdot (x^3 - 4x)$ mit den Nullstellen $-2; 0; 2$



f hat drei Stellen mit der lokalen Änderungsrate Null.

---

12 Fläche

$$A'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (8+h) = 8$$

bzw.

$$A'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{(4-h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-8h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (8-h) = 8$$

mit $h = a - a_0$

---

13 Körper

a) $V(a) = a^3$ bzw. $V = \frac{1}{6} a^3 \cdot \sqrt{2}$

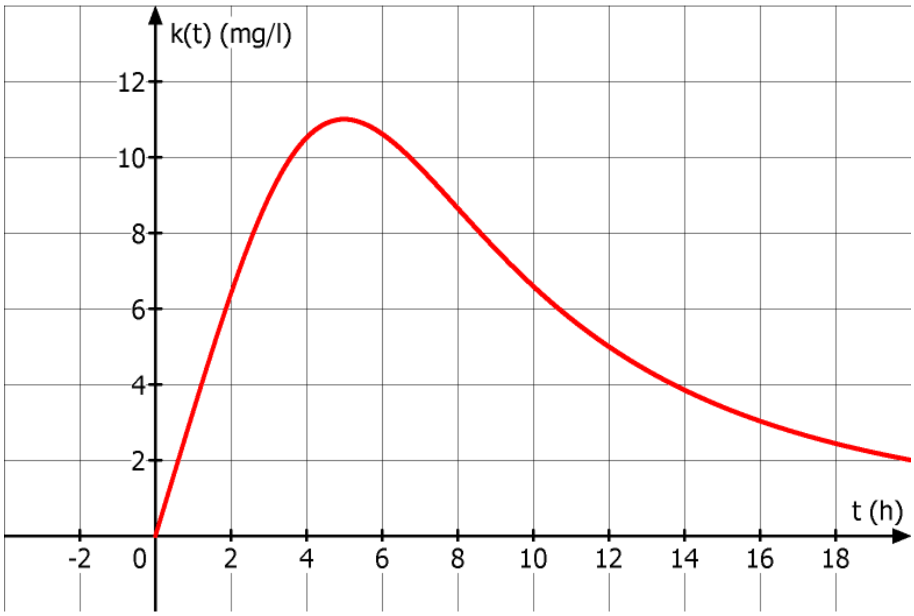
b) $\dfrac{a^3-27}{a-3} = \dfrac{a^3-3a^2+3a^2-9a+9a-27}{a-3} = a^2+3a+9$

$V'(3) = \lim\limits_{a\to 3}(a^2+3a+9) = 27$ bzw. $V'(3) = \dfrac{1}{6}\cdot 27\cdot\sqrt{2} = 4{,}5\sqrt{2}$

---

14 Medikmentenkonzentration

a)



b) $t_0 = 5$ und $f'(5) = 0$

c)

i	1	2	3
t_i	6	8	11
$f'(t_i)$	$-0{,}7$	$-1{,}1$	$-0{,}8$

d) $t_w \approx 6{,}3$

e) Zu den Zeiten $t = 6$ und $t = 11{,}9$ sind die Änderungsraten etwa gleich.

---

15 Kerze

$k(t) = \dfrac{2}{0{,}05t+0{,}2} - 2$

a) $k(0) = \dfrac{2}{0+0{,}2} - 2 = 8$

Die Kerze war zu Beginn 8 cm hoch.

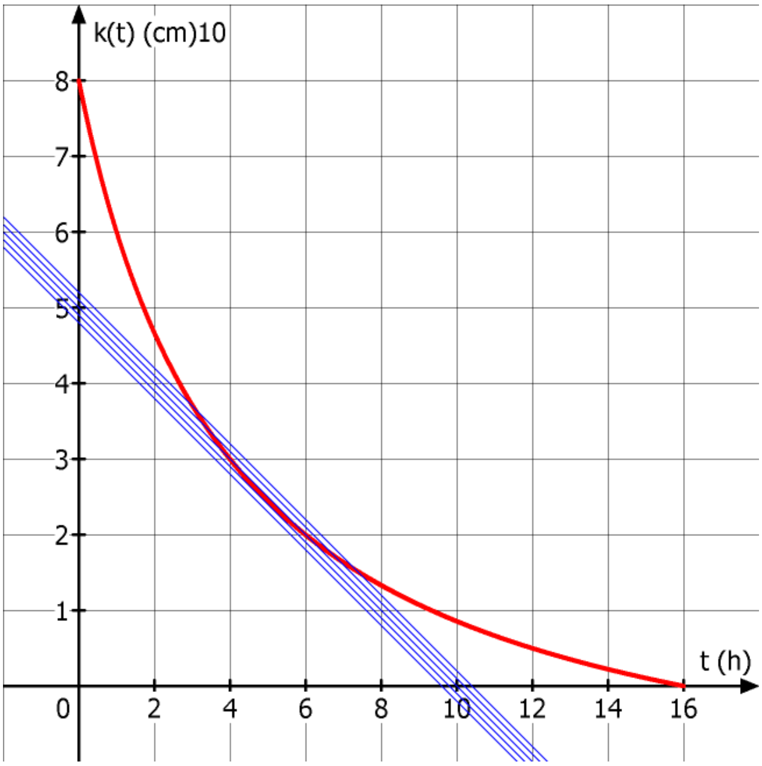
$$k(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{0{,}05t+0{,}2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{0{,}05t+0{,}2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}05t+0{,}2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad t = 16$$

Die Kerze brennt 16 Stunden.

b) $v = -\frac{8\text{ cm}}{16\text{ h}} = -0{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}$

c)



d) Maximale Abbrenngeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ und minimale Abrenngeschwindigkeit zur Zeit $t = 1$.

Bertrag der Steigungen der Tangente an den Graphen von k zu diesen Zeiten.

G 16 Exponentialgleichungen

a) $5 \cdot 1{,}6^x - 12 \cdot 0{,}8^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot 1{,}6^x = 12 \cdot 0{,}8^x \quad \Leftrightarrow \quad \lg 5 + x \cdot \lg 1{,}6 = \lg 12 - x \cdot \lg 0{,}8$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg 12}{\lg 1{,}6 - \lg 0{,}8} = \frac{\lg 5 - \lg 12}{\lg 2} = \lg\left(\frac{5}{24}\right) \approx -0{,}68$$

b) $1{,}2^x - 15 \cdot 1{,}2^{-x} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}2^{2x} - 15 = 2 \cdot 1{,}2^x \quad \Rightarrow \quad 1{,}2^{2x} - 2 \cdot 1{,}2^x - 15 = 0$

$$\Rightarrow \quad u^2 - 2u - 15 = 0 \text{ mit } u = 1{,}2^x$$

$$\Rightarrow \quad u = 5 \lor u = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \log_{1,2} 5 = \frac{\lg 5}{\lg 1{,}2} \approx 8{,}8$$