3 Zusammenhang von Graphen und Termen

===

3 Defintionsmenge - Symmetrieeigenschaft - Asymptoten - Nullstellen

a) $f : x \to \dfrac{2-3x}{x+1}$

Definitionsmenge: $x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Nullstelle: $2-3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2}{3}$

Asymptoten:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-3}{1+\frac{1}{x}} = -3 \text{ und analog } \lim_{x\to-\infty}\frac{2-3x}{x+1} = -3$$

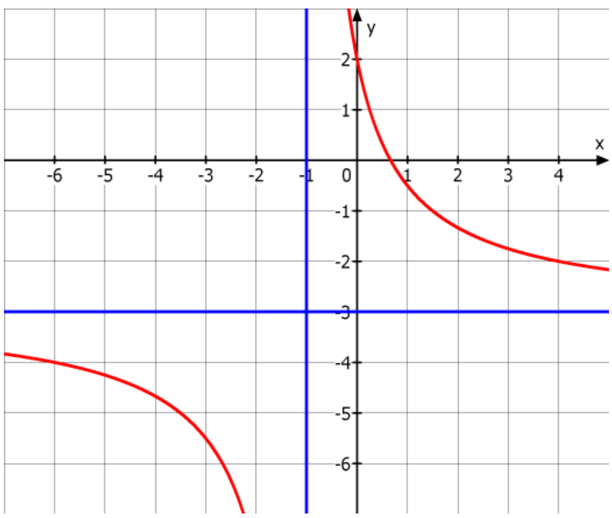
Also waagrechte Asymptote $y = -3$.

Pol an der Stelle $x_0 = -1$ und damit senkrechte Asymptote $x = -1$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < \infty$
$2-3x$	$+$	$+$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Also $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{2-3x}{x+1} = \infty$ und $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{2-3x}{x+1} = -\infty$



Symmetrieeigenchaft: Punktsymmetrie zu $S\left(-1|\,2\right)$

---

b) $f: x \to \frac{1{,}5x}{x^2-1} = \frac{1{,}5x}{(x+1)\cdot(x-1)}$

Definitionsmenge: $(x+1)\cdot(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 1 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Nullstellen: $1{,}5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Symmetrieeigeschaften:

$$f(-x) = \frac{1{,}5\cdot(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{1{,}5x}{x^2-1} = -f(x)$$

d.h. der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Asymptoten:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1{,}5}{x-\frac{1}{x}} = 0 \text{ und analog } \lim_{x\to-\infty} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = 0$$

Also waagrechte Asymptote $y = 0$.

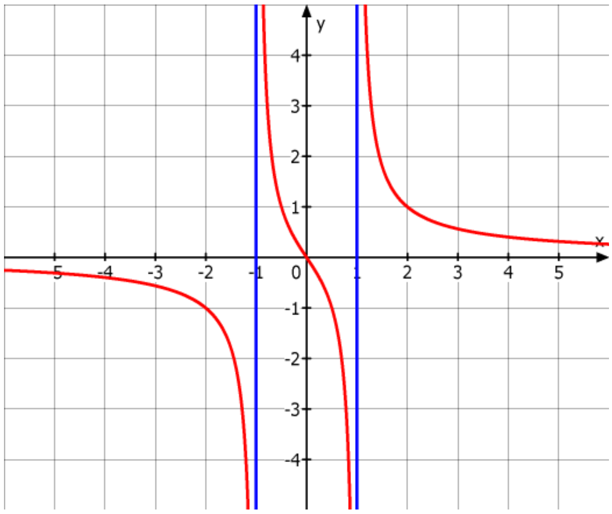
Pole an den Stellen $x_0 = -1$ und $x_1 = 1$ damit senkrechte Asymptoten $x = -1$ und $x = 1$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$1{,}5x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Also $\lim\limits_{x\to-1+0} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-1-0} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = -\infty$

sowie $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1{,}5x}{x^2-1} = -\infty$



---

c) $f : x \to \frac{1}{2}x - 1 - \frac{2}{3x+2} = \frac{x-2}{2} - \frac{2}{3x+2} = \frac{(x-2)\cdot(3x+2)-4}{2\cdot(3x+2)} = \frac{3x^2-4x-8}{2\cdot(3x+2)}$

Definitionsmenge: $3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{2}{3}\}$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2-4x-8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2-2\sqrt{7}}{3} \vee x_2 = \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Asymptoten:

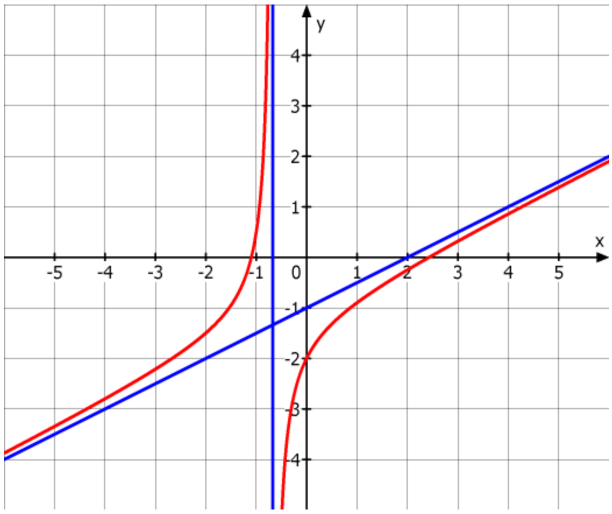
Schiefe Asymptote $y = \frac{1}{2}x - 1$ weil $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{3x-2} = 0$

Pol an der Stelle $x_0 = -\frac{2}{3}$ und damit senkrechte Asymptoten $x = -\frac{2}{3}$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -x_1$	$x_1 < x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < x_2$	$x_2 < x < \infty$
$3x^2-4x-8$	+	–	–	+
$3x+2$	–	+	+	+
$f(x)$	–	–	–	+

Also $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}+0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}+0} f(x) = \infty$



Symmetrieeigenschaften: Punktsymmetrie zu $S\left(-\frac{2}{3} \mid -\frac{4}{3}\right)$

---

d) $f: x \to \frac{x^2-4}{2x^2+1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

Symmetrieeigenschaften:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{2\cdot(-x)^2+1} = \frac{x^2-4}{2x^2+1} = f(x)$$

Der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

Asymptoten:

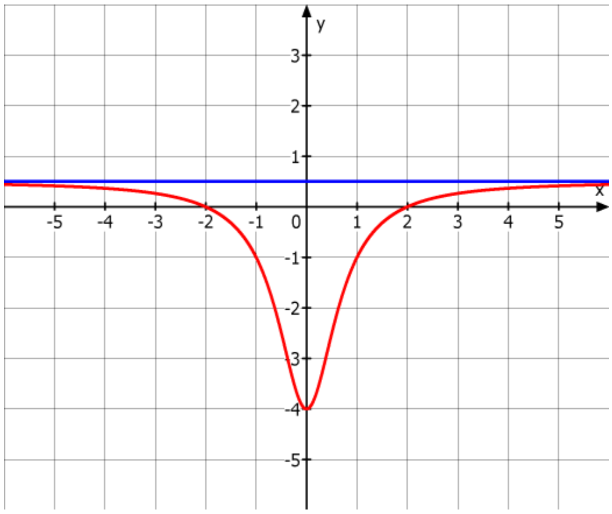
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \text{ und analog } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$$

Also waagrechte Asymptote $y = \frac{1}{2}$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
x^2-4	+	−	+
$2x^2+1$	+	+	+

f(x)	+	−	+



---

e) $f : x \to \dfrac{4-2x}{x^2-2x-3} = \dfrac{4-2x}{(x+1)\cdot(x-3)}$

Definitionsmenge:

$x^2-2x-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 3 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Asymptoten:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Also waagrechte Asymptote $y = 0$.

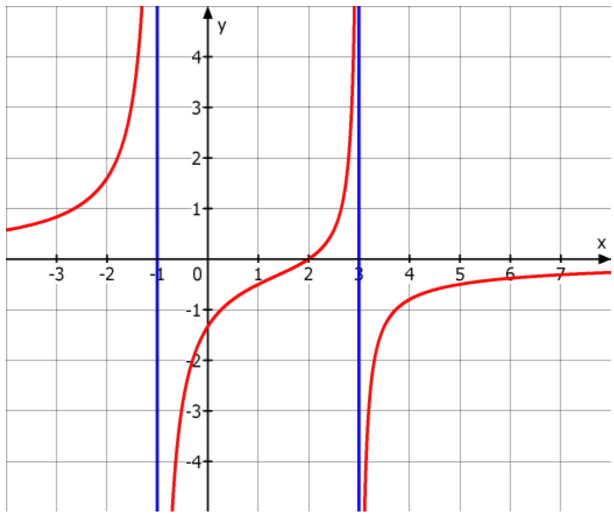
Pole an den Stellen $x_0 = -1$ und $x_1 = 3$ damit senkrechte Asymptoten $x = -1$ und $x = 3$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$4-2x$	+	+	−	−
x^2-2x-3	+	−	−	+
f(x)	+	−	+	−

Also $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to -1´+0} f(x) = -\infty$

sowie $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = -\infty$



Symmetrieeigenschaften: Punktsymmetrie zu $S\left(1 \mid -\frac{1}{2}\right)$

----

f) $f: x \to \dfrac{2x^2-1}{x-2} = 2x+4+\dfrac{7}{x-2}$

Definitionsmenge: $x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Asymptoten:

Schiefe Asymptote $y = 2x+4$ weil $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{7}{x-2} = 0$

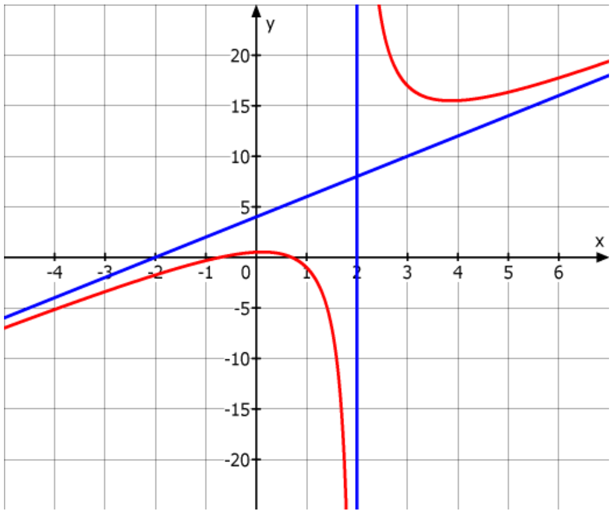
Pol an der Stelle $x_0 = 2$ und damit senkrechte Asymptoten $x = 2$.

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} < x < 2$	$2 < x < \infty$

$3x^2-4x-8$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

Also $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = +\infty$



---

4 Ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

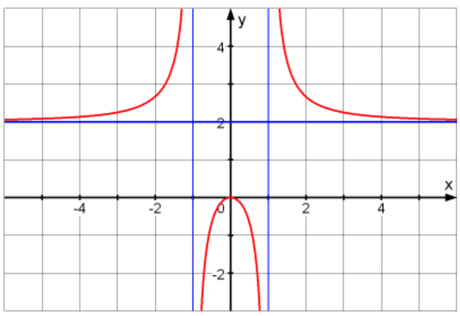
d) $f(x) = 1 - x + \frac{1}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

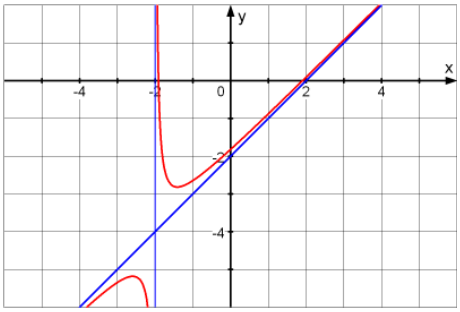
---

5 Gebrochen rationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften

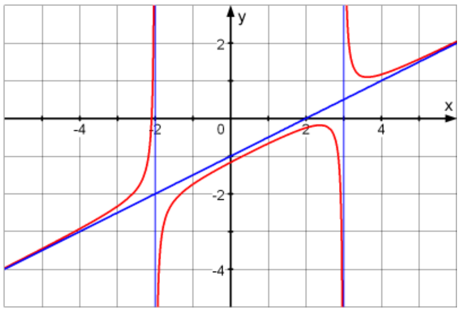
a) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$



b) $f(x) = x - 2 + \frac{1}{4x+8}$



c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{(x+2)(x-3)}$



---

6 Symmetrieverhalten gebrochen rationaler Funktionen

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ist

1. achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $a_i = 0$ für alle ungeraden Zahlen i mit $0 \le i \le n$ ist.

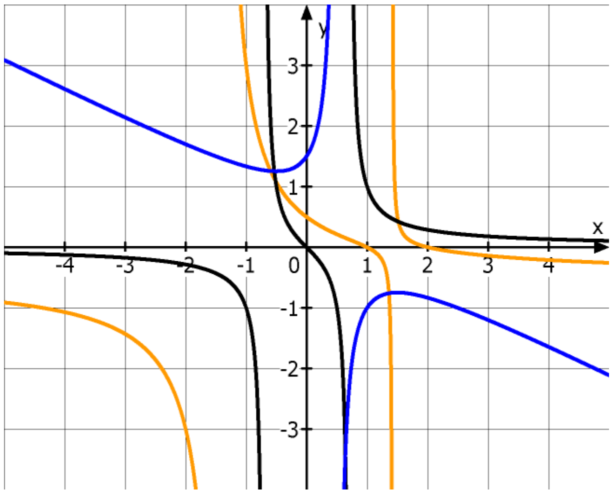
2. punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $O\left(0 \mid 0\right)$, wenn $a_i = 0$ für alle geraden Zahlen i mit $0 \le i \le n$ ist.

b) Eine gebrochen rationale Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit zwei Polynomen z(x) und n(x) ist

1. achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn die durch z(x) und n(x) definierten ganzrationalen Funktionen beide achsensymmetrisch oder beide punktsymmetrisch sind.

2. punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $O\left(0\,|\,0\right)$, wenn eine der durch z(x) bzw. n(x) definierten ganzrationalen Funktionen achsensymmetrisch oder und die andere punktsymmetrisch ist.

7.



Orange: $f(x) = \dfrac{(2-x)\cdot(x-1)}{2x^2-4}$

Schwarz: $f(x) = \dfrac{x}{2x^2-1}$

Blau: $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x-1}$

G 8

Körper	Zylinder	Kegel	Kugel
Oberflächeninhalt	$O_Z = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi r\cdot h$	$O_{Ke} = \pi\cdot r^2 + \pi r\cdot h$	$O_{Ku} = 4\pi\cdot r^2$
Mantelfläche	$M_Z = 2\pi r\cdot h$	$M_{Ke} = \pi r\cdot m$	-----
Rauminhalt	$V_Z = \pi r^2\cdot h$	$V_{Ke} = \dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h$	$V_{Ku} = \dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3$

$$O_1 = \pi\cdot(6\text{dm})^2 + 2\pi\cdot 6\text{dm}\cdot 5\text{dm} + 2\pi\cdot(6\text{dm})^2 = 168\pi\ \text{dm}^2$$

$$V_1 = \pi\cdot(6\text{dm})^2\cdot 5\text{dm} + \frac{2}{3}\pi\cdot(6\text{dm})^3 = 324\pi\ \text{dm}^3$$

$$m = \sqrt{3{,}2^2 + 4^2}\ \text{dm} = \frac{4}{5}\sqrt{41}\ \text{dm}$$

$$O_2 = 2\pi\cdot(4\text{dm})^2 + \pi\cdot 4\text{dm}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{41}\text{dm} = 16\cdot(2\pi + \frac{1}{5}\sqrt{41})\ \text{dm}^2$$

$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot (4\text{dm})^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot (4\text{dm})^2 \cdot 3{,}2\text{dm} = 59\frac{11}{15}\pi\text{dm}^3$

G 9

a) Mit $v_1 = 24\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 400\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $v_2 = 300\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $\Delta t = 4$ min muss gelten

$$v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t + \Delta t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_2 \cdot \Delta t}{v_1 - v_2} = \frac{300\ \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot 4\text{min}}{100\ \frac{\text{m}}{\text{min}}} = 12\ \text{min}$$

t ist dabei die Fahrtzeit von Stefan.

$s = v_1 \cdot t = 400\ \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot 12\ \text{min} = 4{,}8$ km ist dann die Länge des Schulwegs.

b) Stefan fährt $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$ schneller als Kai.

c) Er spart gegenüber Kai 25% an Fahrzeit.
