Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

==

1. Bestimme:

a) $\int e^{2x-1}dx$ b) $\int \frac{1}{0,5x+1}dx$ c) $\int \sin(4x+\frac{\pi}{2})dx$

---

2. Berechne

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{1}{2x+1}dx$ c) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx$ d) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

---

3. Bestimme

a) $\int 2x\cdot e^{x^2}dx$ b) $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx$ c) $\int \frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{x}-1)^4dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

---

4. Gib eine Stammfunktion von f bzw. f_a an.

a) $f: x \rightarrow f(x) = -\frac{3}{4x^2}$ b) $f_a: x \rightarrow f_a(x) = ax\cdot(2x-5)$ c) $f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{1-2x}$

d) $f_a: x \rightarrow f(x) = \sin(\frac{1}{a}x-\pi)$ e) $f: x \rightarrow f(x) = \frac{x-2}{x^2}$ f) $f: x \rightarrow f(x) = x+e^{1-x}$

g) $f: x \rightarrow f(x) = e^x\cdot(1-e^x)$ h) $f: x \rightarrow f(x) = \frac{3}{2-x}$ i) $f: x \rightarrow f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

j) $f: x \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2x^4+1}$ k) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$ l) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$

---

5. Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin x - x\cdot\cos x$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x\cdot\sin x$ ist.

---

6. Bestimme eine Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \mid 2\right)$ geht.

a) $f: x \rightarrow f(x) = \frac{3x-2}{4x}$ b) $f: x \rightarrow f(x) = 2\cdot\sin(\pi x)$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

Berechnung von Flächeninhalten

==

1. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f : x \to f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen

   a) $x = 1$ und $x = 2$ b) $x = 1$ und $x = 4$ eingeschlossen wird.

---

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f : x \to e^{\frac{1}{2}x} - 2$ mit den Koordinatenachsen einschließt!

---

3. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird.

   a) $f : x \to f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ b) $f : x \to f(x) = -(x-3)^2 + 4$ c) $f : x \to f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

---

4. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist durch $f_a : x \to f_a(x) = a - x^2$ eine Funktion gegeben, deren Graph mit der x-Achse eine Fläche einschließt.

   Bestimme a so, dass diese Fläche den Inhalt 10 hat.

---

5. a) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktionen $f : x \to f(x) = 4 - x^2$ und $h : x \to h(x) = (x+1)^2 - 1$ begrenzt wird.

   b) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \to f(x) = x^2 - 1$ und der Geraden $g : y = 5 - x$ begrenzt wird.

   c) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \to (x) = x^2 - x$, der Geraden $g : y = 4 - x$ und der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird.

   d) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, der Normalen im Punkt $P\left(2 \mid p\right)$ und den beiden Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

---

6. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u > 2$ begrenzen eine Fläche. Bestimme u so, dass der Inhalt dieser Fläche gleich 1 ist.

---

7. Berechne dasVerhältnis, in dem dieGerade $y = 3x$ die Fläche teilt, die der Graph von $f : x \to f(x) = 4 - x^2$ mit der x-Achse einschließt!

---

8. Untersuche, ob die unendlich ausgedehnte Fläche, die der Graph der Funktion f im 1.Quadranten mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ einschließt, einen endlichen Inhalt besitzt.

   a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{3}{0,5x + 1}$

Lösungen

==

1. a) $\int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ TYP: $e^{\bullet}$

b) $\int \frac{1}{0{,}5x+1}dx = 2\cdot\ln|0{,}5x+1| + C$ TYP: $\frac{1}{\bullet}$

c) $\int \sin(4x+\frac{\pi}{2})dx = -\frac{1}{4}\cdot\cos(4x+\frac{\pi}{2}) + C$ TYP: $\sin\bullet$

---

2. TYP: Logarithmische Integration

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C$

b) $\int \frac{1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|2x+1| + C$

c) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2e^x}{2e^x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(2e^x+1) + C$

Betragsstriche werden nicht benötigt, da $2e^x+1>0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

---

3. Bestimme

a) $\int 2x\cdot e^{x^2}dx$ b) $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx$ c) $\int \frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{x}-1)^4dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

---

4. Gib eine Stammfunktion von f bzw. f_a an.

a) $f: x \to f(x) = -\frac{3}{4x^2}$ b) $f_a: x \to f_a(x) = ax\cdot(2x-5)$ c) $f: x \to f(x) = \sqrt{1-2x}$

d) $f_a: x \to f(x) = \sin(\frac{1}{a}x-\pi)$ e) $f: x \to f(x) = \frac{x-2}{x^2}$ f) $f: x \to f(x) = x+e^{1-x}$

g) $f: x \to f(x) = e^x \cdot (1 - e^x)$ h) $f: x \to f(x) = \frac{3}{2-x}$ i) $f: x \to f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

j) $f: x \to f(x) = \frac{x^3}{2x^4+1}$ k) $f: x \to f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

---

5. Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin x - x \cdot \cos x$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin x$ ist.

---

6. Bestimme eine Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \mid 2\right)$ geht.

a) $f: x \to f(x) = \frac{3x-2}{4x}$ b) $f: x \to f(x) = 2 \cdot \sin(\pi x)$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

---

1. Bestimme:

a) $\int e^{2x-1}dx$ b) $\int \frac{1}{0{,}5x+1}dx$ c) $\int \sin(4x + \frac{\pi}{2})dx$

---

2. Berechne

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{1}{2x+1}dx$ c) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx$ d) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

---

3. Bestimme

a) $\int 2x \cdot e^{x^2}dx$ b) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1}dx$ c) $\int \frac{1}{x^2} \cdot (\frac{1}{x} - 1)^4 dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

Aufgabe 4

a) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f: x \to f(x) = -\frac{3}{4x^2} = -\frac{3}{4}x^{-2} \quad \to \quad \text{Stammfunktion einer Potenzfunktion}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{3}{4}x^{-1} = -\frac{3}{4x}$$

---

b) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f_a(x) = ax \cdot (2x-5) = 2ax^2 - 5ax \quad \rightarrow \quad \text{Stammfunktion eines Polynoms}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F_a(x) = 2a \cdot \frac{x^3}{3} - 5a \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{2a}{3}x^3 - \frac{5}{2}ax^2$$

---

b) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{1-2x} = (1-2x)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \bullet^{\frac{1}{2}}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = \frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \cdot (1-2x)^{\frac{3}{2}}$$

---

c) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

---

d) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f_a(x) = \sin\left(\frac{1}{a}x - \pi\right) \quad \rightarrow \quad \sin\bullet$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F_a(x) = -\cos\left(\frac{1}{a}x - \pi\right) \cdot a = -a \cdot \cos\left(\frac{1}{a}x - \pi\right)$$

---

e) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} - 2x^{-2} \quad \rightarrow \quad \text{Integration von Potenzfunktionen}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = \ln|x| - 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| + 2x^{-1} = \ln|x| + \frac{2}{x}$$

---

f) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f(x) = x + e^{1-x} \quad \rightarrow \quad x + e^{\bullet}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - e^{1-x} \cdot (-1) = \frac{x^2}{2} + e^{1-x}$$

---

g) 1. Umformung und Lösungsstrategie:

$$f(x) = e^x \cdot (1 - e^x) = e^x - e^{2x} \quad \rightarrow \quad e^x - e^{\bullet}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$$

---

h) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f(x) = \frac{3}{2-x} = -3 \cdot \frac{-1}{2-x} \quad \rightarrow \quad \text{logarithmische Integration}$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = -3 \cdot \ln(2-x)$$

---

i) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f : x \rightarrow f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = e^x \cdot (e^x+1)^{-2} \quad \rightarrow \quad \text{Integration nach dem Schema } \bullet^{-2} \cdot \bullet'$$

2. Stammfunktion und Vereinfachung:

$$F(x) = \frac{(e^x+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{e^x+1}$$

---

j) 1. Umformung und Lösungsstrategie:

$$f : x \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2x^4+1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8x^3}{4x^4+1} \quad \rightarrow \quad \text{logarithmische Integration}$$

2. Stammfunktion:

$$F(x) = \ln(2x^4+1)$$

---

k) 1. Umformung und Lösungsstrategie :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \rightarrow \quad \text{logarithmische Integration}$$

2. Stammfunktion:

$F(x) = \ln|e^{2x} + 1|$

---

5. $F'(x) = \cos x - 1\cdot\cos x - x\cdot(-\sin x) = x\cdot\sin x = f(x)$ und damit ist alles gezeigt.

---

6. Bestimme eine Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \mid 2\right)$ geht.

a) $f(x) = \frac{3x-2}{4x} = \frac{3x}{4x} - \frac{2}{4x} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}lx + C$

$P\left(1 \mid 2\right)$ eingesetzt $F(1) = \frac{3}{4} - 2\cdot\ln 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$

Also $F(x) = \frac{3}{4}x - 2\ln x + \frac{5}{4}$

b) $f : x \to f(x) = 2\cdot\sin(\pi x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\pi x) + C$

$P\left(1 \mid 2\right)$ eingesetzt $F(1) = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\pi\cdot 1) + C = -\frac{2}{\pi}\cdot(-1) + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 - \frac{2}{\pi}$

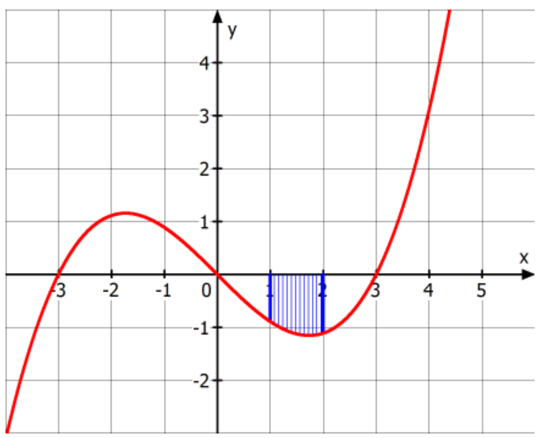
Also $F(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\pi x) + 2 - \frac{2}{\pi}$

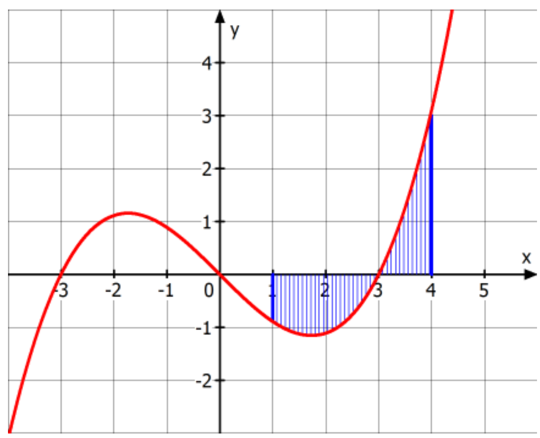
c) $f(x) = \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

$P\left(1 \mid 2\right)$ eingesetzt $F(1) = \frac{1}{2}\cdot\ln 5 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 - \frac{1}{2}\cdot\ln 5$

Also $F(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln|2x+1| + 2 - \frac{1}{2}\ln 5$

1.





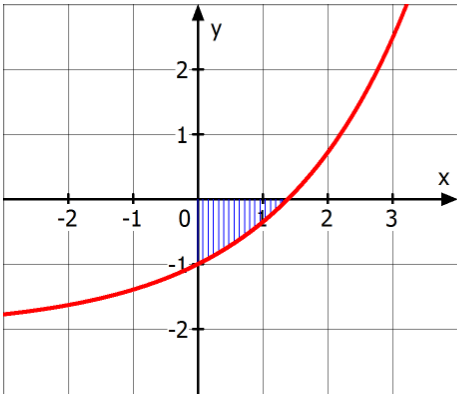
a) $\int_1^2 (\frac{1}{9}x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = (\frac{1}{36}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 4) - (\frac{1}{36}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1) = -\frac{13}{12} \Rightarrow \mathsf{A} = 1\frac{1}{12}$

b) $\int_1^3 (\frac{1}{9}x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = (\frac{1}{36}\cdot 81 - \frac{1}{2}\cdot 9) - (\frac{1}{36}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1) = -\frac{16}{9}$

$\int_3^4 (\frac{1}{9}x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_3^4 = (\frac{1}{36}\cdot 256 - \frac{1}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{36}\cdot 81 - \frac{1}{2}\cdot 9) = \frac{49}{36}$

$\mathsf{A} = \frac{16}{9} + \frac{49}{36} = \frac{113}{36} = 3\frac{5}{36}$

2.



Nullstelle: $e^{\frac{1}{2}x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\cdot\ln 2$

$\int_0^{\ln 4} (e^{\frac{1}{2}x} - 2)dx = \left[2\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x\right]_0^{2\cdot\ln 2} = (2\cdot 2 - 4\cdot\ln 2) - (2 - 0) = 2 - 4\cdot\ln 2 \Rightarrow \mathsf{A} = 4\cdot\ln 2 - 2$

---

3. a) Nullstellen: $2 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$\int_0^2 (2 - \frac{1}{2}x^2)dx = \left[2x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow \mathsf{A} = 2\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

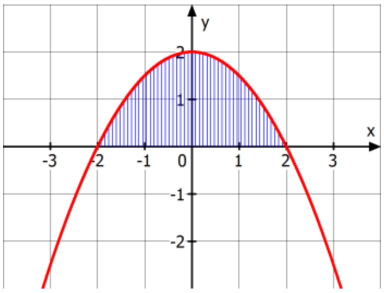
b) Nullstellen:

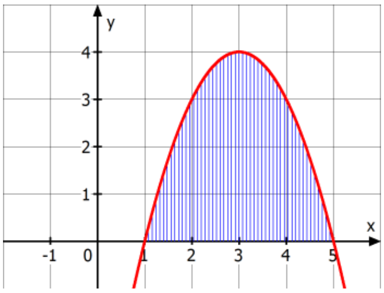
$-(x-3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = -2 \vee x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

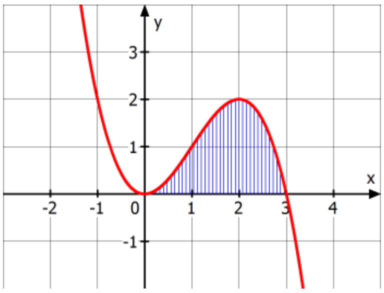
$\int_1^5 [-(x-3)^2 + 4]dx = \left[-\frac{(x-3)^3}{3} + 4x\right]_1^5 = (-\frac{8}{3} + 20) - (\frac{8}{3} + 4) = 10\frac{2}{3}$

c) Nullstellen: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$

$$\int_0^3 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{81}{8} = 13\frac{1}{2} - 10\frac{1}{8} = 3\frac{3}{8}$$







---

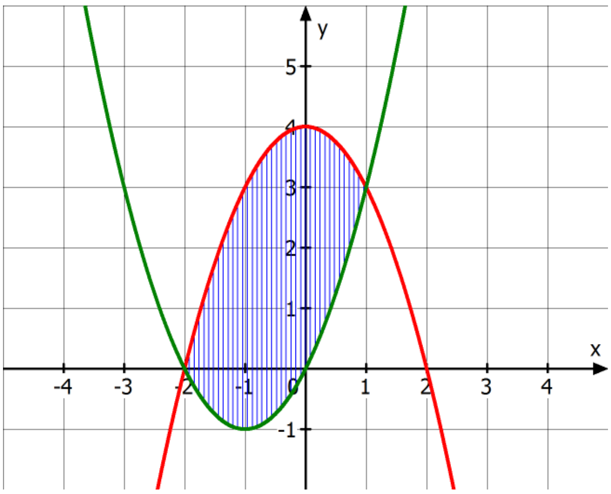
4. Nullstellen: $a - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}$

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad A(a) = 2 \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Bedingung : $\frac{4}{3}a\sqrt{a} = 10 \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{a} = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{225}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{225}{4}}$

---

5. a)



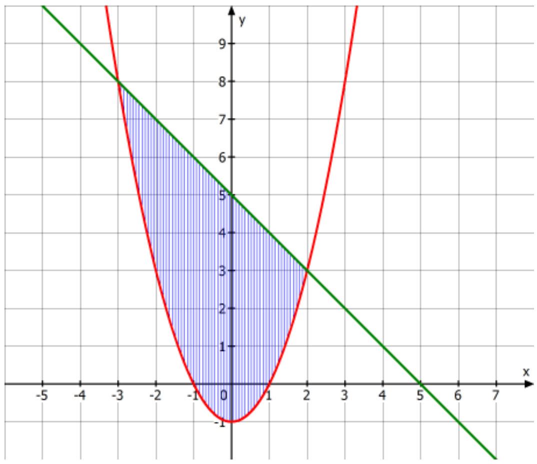
Schnittstellen: $4 - x^2 = (x+1)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 1$$

$$\int_{-2}^{1} (2x^2 + 2x - 4)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x\right]_{-2}^{1} = (\frac{2}{3} + 1 - 4) - (-\frac{16}{3} + 4 + 8) = -9$$

$A = 9$

b)

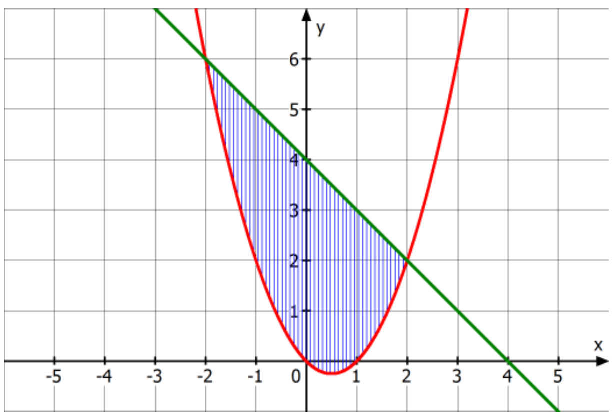


Schnittstellen: $x^2 - 1 = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 2$

$$\int_{-3}^{2} (x^2 + x - 6)x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right]_{-3}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right) - \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) = -20\frac{5}{6}$$

$A = 20\frac{5}{6}$

c)

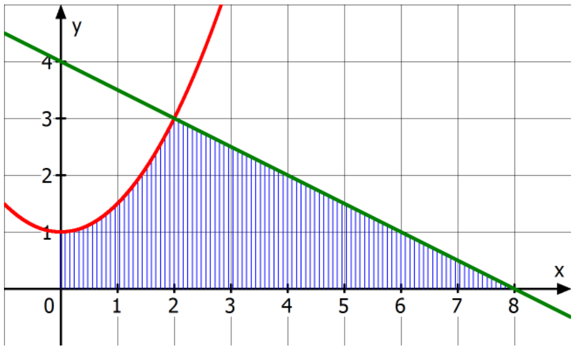


Schnittstellen: $x^2 - x = 4 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4) = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3}$$

$A = 10\frac{2}{3}$

d)



$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

Gleichung der Normalen: $y = -\frac{1}{2}\cdot(x-2)+3 = -\frac{1}{2}x+4$

Schnittstelle mit der x-Achse: $x = 8$

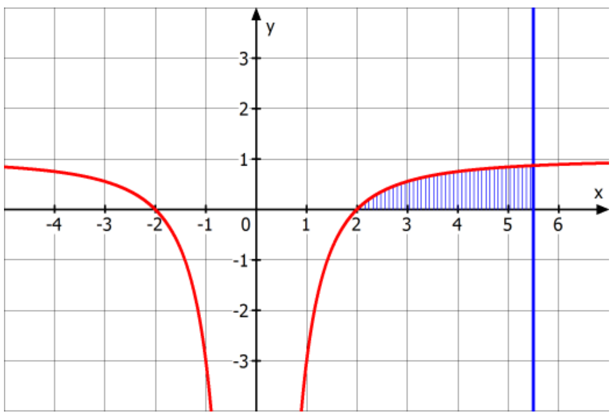
$$A_1 = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2+1)dx = \left[\frac{1}{6}x^3+x\right]_0^2 = \frac{4}{3}+2 = 3\frac{1}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$$

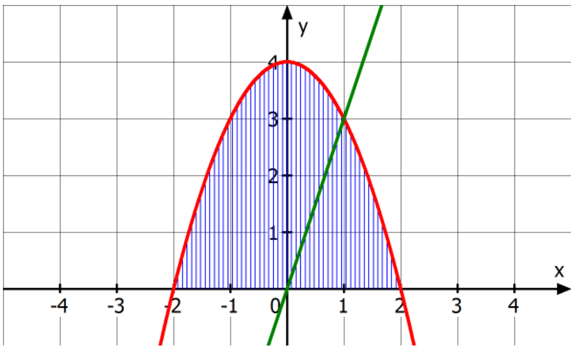
$$A = A_1 + A_2 = 3\frac{1}{3}+9 = 12\frac{1}{3}$$

---

6. $\int_1^u (1-\frac{4}{x^2})dx = \left[x+\frac{4}{x}\right]_2^u = u+\frac{4}{u}-4 = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2+4-5u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 4$



7.



Schnittstellen: $4-x^2 = 3x \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3x-4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -4 \vee x = 1$

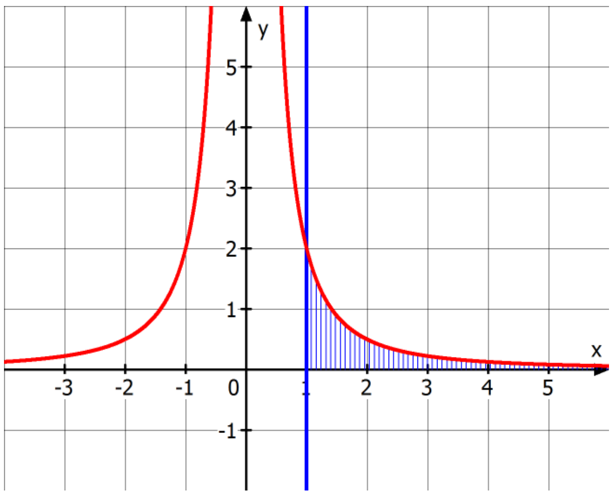
$$\int_{-2}^{0}(4-x^2)dx = \frac{16}{3}$$

$$\int_{0}^{1}(4-x^2-3x)dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = 4-\frac{1}{3}-\frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{16}{3}+\frac{13}{6}}{6-\frac{13}{6}} = \frac{45}{23}$$

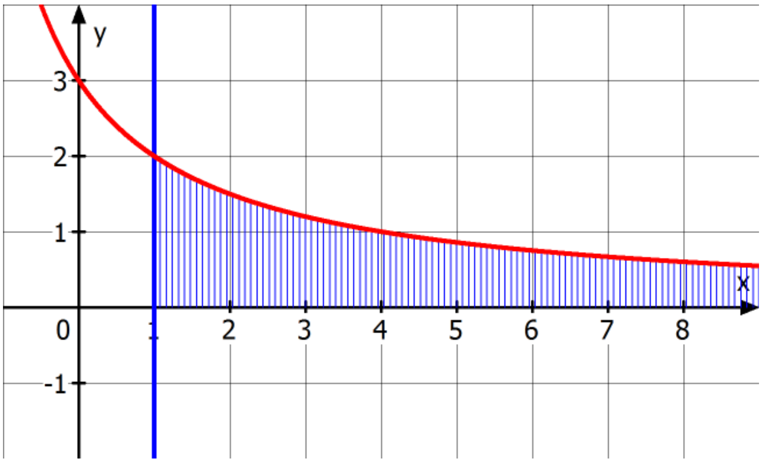
---

8. a)



$$\int_1^u \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^u = -\frac{2}{u}+2 \quad\Rightarrow\quad A(u) = 2-\frac{2}{u} \quad\Rightarrow\quad \lim_{u\to\infty} A(u) = 2$$

b)



$$\int_1^u \frac{3}{0{,}5x+1}\,dx = \Big[6\cdot\ln(0{,}5x+1)\Big]_1^u = 6\cdot\ln(0{,}5u+1) - 6\cdot\ln 1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad A(u) = 6\cdot\ln(0{,}5u+1) - 6\cdot\ln 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \lim_{u\to\infty} A(u) = \infty$$