Skalarprodukt und seine Anwendungen

==

1. Bestimme u so, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ 2 \end{pmatrix}$ den Wert 2 hat!

---

2. Bestimme u so, das die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ u \end{pmatrix}$

---

3. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit $A\left(-1 \mid 2 \mid -5\right)$, $B\left(1 \mid 12 \mid 6\right)$ und $C\left(3 \mid 6 \mid -3\right)$.

---

4. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Vektoren die parallel zu $\vec{a}$ sind und die Länge 22,5 haben!

---

5. Gegeben sind die Punkte $A\left(7 \mid 1 \mid 5\right)$ und $B\left(6 \mid b \mid -36\right)$.

Bestimmen Sie b so, dass die Strecke [AB] die Länge 9 hat!

---

6. Bestimmen Sie den Punkt bzw. die Punkte auf der x_1-Achse, die von $A\left(0 \mid -2 \mid 4\right)$ doppelt so weit entfernt sind wie von $B\left(6 \mid 2 \mid -1\right)$?

---

7. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A\left(1 \mid 2 \mid 3\right)$, $B\left(6 \mid 0 \mid -4\right)$ und $C\left(-1 \mid 8 \mid 9\right)$.

Berechne die Größe des Winkels $\alpha = \measuredangle CAB$ auf zwei Dezimalen genau.

---

8. Zeichne das Dreieck ABC mit $A\left(2 \mid -1\right)$, $B\left(4 \mid 1\right)$ und $C\left(-3 \mid 2\right)$ und berechne die Größe seiner Innenwinkel.

---

9. Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,3\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,0)$ und $S(0|\,6\,|\,4\,)$ sind die die Eckpunkte bzw. die Spitze einer dreiseitigen Pyramide.

a) Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem.

b) Berechne die Größe des Winkels, den die Grundkante [BA] mit der Seitenkante [BS] ein schließt auf zwei Dezimalen genau.

c) Berechne die Größe dîe Größe des Neigungswinkels der Seitenkante [AS] gegen die Grundfläche.

d) Berechne das Volumen der Pyramide.

Lösungen

==

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u \\ 2 \end{pmatrix} = u^2 - 5u + 8 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 5u + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 2 \vee u = 3$

----

2. Nestimme u so, das die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix} = 10 - 21 + u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 11$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ u \end{pmatrix} = -12 - 20 - 7u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{32}{7}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ u \end{pmatrix}$

----

3. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit $A(-1\,|\,2\,|\,-5)$, $B(1\,|\,12\,|\,6)$ und $C(3\,|\,6\,|\,-3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = 15$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2^2+(-6)^2+(-9)^2} = 11$$

$U_{ABC} = 32$

---

4. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a} = \sqrt{(-3)^2+6^2+6^2} = 9.$

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{22{,}5}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ oder } \overrightarrow{a_1} = -\frac{22{,}5}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}$$

---

5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+(b-1)^2+1^2} = 9 \Rightarrow 1+(b-1)^2+1 = 81 \Rightarrow$$

$$b = 1-\sqrt{79} \vee b = 1+\sqrt{79}$$

---

6. Ansatz: $P\left(p \mid 0 \mid 0\right)$

Damit ist $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -p \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 6-p \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bedingung $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(-p)^2+(-2)^2+4^2} = 2 \cdot \sqrt{(6-p)^2+2^2+(-1)^2}$

$$\Rightarrow p^2+20 = 4 \cdot (6-p)^2+20 \Leftrightarrow 3p^2-48p+144 = 0 \Leftrightarrow p^2-16p+48 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 4 \vee p = 12$$

Die Punkte $\left(4 \mid 0 \mid 0\right)$ bzw. $\left(12 \mid 0 \mid 0\right)$ sind doppelt so weit von A wie von B entfernt.

---

7. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{78}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{76}$

und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5\cdot(-2)+(-2)\cdot 6+(-7)\cdot 6 = -64$

Also $\cos\alpha = \dfrac{-64}{\sqrt{78}\cdot\sqrt{76}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-64}{\sqrt{78}\cdot\sqrt{76}}\right) \approx 146{,}23°$

---

8. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(2 \mid -1)$, $B(4 \mid 1)$ und $C(-3 \mid 2)$ und berechne die Größe seiner Innenwinkel.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit

$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{34}$ und $|\overrightarrow{BC}| = 5\sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}} = \frac{-4}{4\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 104{,}0°$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}}{2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta \approx 53{,}1° \Rightarrow \gamma \approx 22{,}9° \text{ und damit}$$

9.

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit $\cos\measuredangle SBA = \dfrac{-13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}} \Rightarrow \measuredangle SBA \approx 132$

c) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{68}$

Elementare Rechnung: $\sin\nu = \dfrac{4}{\sqrt{68}} = \dfrac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \nu \approx 29{,}0°$

d) Elementare Rechnung: $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 4 = 8$