

## Funktionen und Graphen

---

1. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$  mit  $D = D_{\max}$

a) Geben Sie  $D$  an und bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$ .

b) Zeigen Sie, dass  $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x + 2}$  gilt und untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  an den Rändern von  $D$ .

Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von  $f$  an.

c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema von  $f$  und zeichnen Sie den Graphen von  $f$ .

d) Die Tangenten in den Punkten  $P(-3 | p)$  und  $Q(2 | q)$  schneiden sich im Punkt  $S$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $S$  und den Schnittwinkel der beiden Tangenten.

---

2. Betrachten Sie die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{x + a}{x^2}$  mit dem Parameter  $a \neq 0$ .

a) Untersuchen Sie die Scharfunktionen auf Symmetrie und ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Schargraphen an.

b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema einer Scharfunktion in Abhängigkeit von  $a$ .

---

3. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1 + \frac{3x}{x^2 - 4}$  und  $D = D_{\max}$ .

a) Geben Sie  $D$  an und bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$ .

b) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  an den Rändern der Definitionsmenge.

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f$ .

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen in dessen Schnittpunkt  $S$  mit der  $x$ -Achse.

e) Zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  punktsymmetrisch zu  $S$  ist und zeichnen Sie ihn für  $-4 \leq x \leq 4$ .

---

4. Gegeben sind ist die Funktionenschar  $f_a : x \rightarrow f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 2ax$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Untersuchen Sie, für welche Werte von  $a$  der Graph einer Scharfunktion zwei Extrema besitzt.

b) Bestimmen Sie  $a$  so, dass die Scharfunktion  $f_a$  an der Stelle  $x = 1$  ein Extremum besitzt.

---