Lösungen des Übungsblatts

===--

2. Gegeben: $A\left(0\,|\,0\,|\,0\right)$, $B\left(3\,|\,0\,|\,6\right)$, $C\left(1\,|\,6\,|\,2\right)$ und $D\left(5-2k\,|\,1\,|\,k\right)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}4-2k\\-5\\k-2\end{pmatrix} \text{ ergibt } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4-2k\\-5\\k-2\end{pmatrix} = 12-6k+6k-12 = 0$$

----

4. Gegeben: $A\left(-3\,|\,5\,|\,6\right)$, $B\left(2\,|\,-1\,|\,0\right)$ und $D\left(-5\,|\,-6\,|\,-2\right)$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}0\\-12\\-8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\-17\\-14\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix}7\\5\\2\end{pmatrix} \text{ und damit } \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -92.$$

$$\cos\varphi = \frac{-92}{\sqrt{494}\cdot\sqrt{78}} \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 117{,}9°$$

Die Diagonalen schneiden sich also unter einem Winkel vom $180° - 117{,}9° = 62{,}1°$

----

5. Gegeben: $A\left(1\,|\,0\,|\,1\right)$, $B\left(2\,|\,-1\,|\,0\right)$ und $C\left(4\,|\,-1\,|\,3\right)$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{BC} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \text{ ergibt } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = 2 \text{ und damit}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 72°$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha \approx \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}\cdot\sin 72° \approx 3{,}1$$

----

6. Gegeben: $A\left(8\,|\,14\,|\,2\right)$, $B\left(2\,|\,18\,|\,14\right)$, $C\left(14\,|\,24\,|\,18\right)$, $D\left(20\,|\,20\,|\,6\right)$ und $S\left(15\,|\,7\,|\,16\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Also sind die Seiten $[AB]$ und $[CD]$ des Vierecks ABCD gleich lang und parallel.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{144 + 36 + 16} = 14$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -72 + 24 + 48 = 0 \text{ und } \overline{AB} = \sqrt{36 + 16 + 144} = 14$$

zeigt schließlich, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

Der Mittelpunkt M von $[AC]$ ist gegeben durch $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix}$ und damit

ist $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aus $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$ und $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ - muss man noch zeigen - folgt, dass ABCDS eine gerade, quadratische Pyramide ist.

b) $h = \overline{MS} = \sqrt{16 + 144 + 36} = 14$

und damit ist das Volumen der Pyramide gegeben durch

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} 14^2 \cdot 14 =$$

Der gesuchte Winkel wird von den Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AC}$ eingeschlossen.

Mit $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} = -42 - 28 + 168 = 98 \text{ und damit}$$

$$\cos\alpha = \frac{98}{\sqrt{49+49+196} \cdot \sqrt{36+100+256}} = = \frac{98}{7\sqrt{6} \cdot 14\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \approx 73{,}2°$$
