Kurvendiskussion

==

1. Die ganzrationale Funktion

Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{1}{4}(x-1)^4(x+1)^2$, $D = \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen

b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie Art und Lage der Extrema.

c) Untersuchen Sie, ob der Graph von f Wendepunkte besitzt

d) Zeichnen Sie den Graphen von f auf einer geeigneten Teilmenge der Definitionsmenge

---

2. Die gebrochen-rationale Funktion

Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{4x}{x^2+1}$, $D = D_{max}$

Diskutiere die Funktion

- Definitionsmenge
- Symmetrie
- Nullstellen und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Verhalten am Rande der Definitionsmenge
- Monotonieverhalten und Extrema
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Zeichne den Graphen für $-6 \le x \le 5$

---

3. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{x^2}{x-1}$, $D = D_{max}$

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f und das Verhalten von f am Rand der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen an

b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema und untersuchen Sie das Monotonieverhalten

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Wendepunkt besitzt aber trotzdem unterschiedliches Krümmungsverhalten zeigt.

d) Zeichnen Sie den Graphen in einem geeigneten Intervall.

4. Gegeben ist die Funktion $f: x \to x\sqrt{8-x^2}$, $D = D_{max}$

a) Bestimmen Sie D_{max} und das Symmetrieverhalten von f und geben Sie die Nullstellen von f an.

b) Ermitteln Sie f '(x) und untersuchen Sie das Verhalten der Ableitung an den beiden Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist.

Ziehen Sie daraus Rückschlüsse auf den Verlauf des Graphen

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema von f.

d) Untersuchen Sie, ob der Graph von f Wendepunkte besitzt

e) Zeichnen Sie den Graphen von f.

---

5. Gegeben ist die Funktion $f: x \to (x+1)^3(x-1)^2$, $D = \mathbb{R}$

a) Geben Sie die Nullstellen von f an

b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie Art und Lage der Extrema.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f drei Wendepunkte besitzt.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f auf einer geeigneten Teilmenge der Definitionsmenge

---

6. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \dfrac{x^2+4x}{x^2+2}$, $D = D_{max}$

Diskutiere die Funktion.

---

7 Gegeben ist die Funktion $f: x \to \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$, $D = D_{max}$

Diskutiere die Funktion

---

8 Gegeben ist die Funktion $f: x \to (1-x^2)\sqrt{x}$, $D = \mathbb{R}_0^+$

a) Geben Sie die Nullstellen von f an.

b) Ermitteln Sie f '(x) und untersuchen Sie das Verhalten der Ableitung an der Stelle, an der f nicht differenzierbar ist. Ziehen Sie daraus Rückschlüsse auf den Verlauf des Graphen

c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie Art und Lage der Extrema.

d) Zeigen Sie, dass der Graph von f keine Wendepunkte besitzt.

e) Zeichnen Sie den Graphen von f auf einer geeigneten Teilmenge der Definitionsmenge.

5. Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow (x+1)^3(x-1)^2$, $D = \mathbb{R}$

a) Nullstellen : $x = -1$ und $x = 1$

b) $f'(x) = 3\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2 + (x+1)^3\cdot 2\cdot(x-1) = (x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(3x-3+2x+2) =$

$= (x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(5x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0{,}2$

$E_1\left(-1; 0\right)$ und $E_2\left(0{,}2; 1\frac{331}{3125}\right)$ und $E_1\left(1; 0\right)$

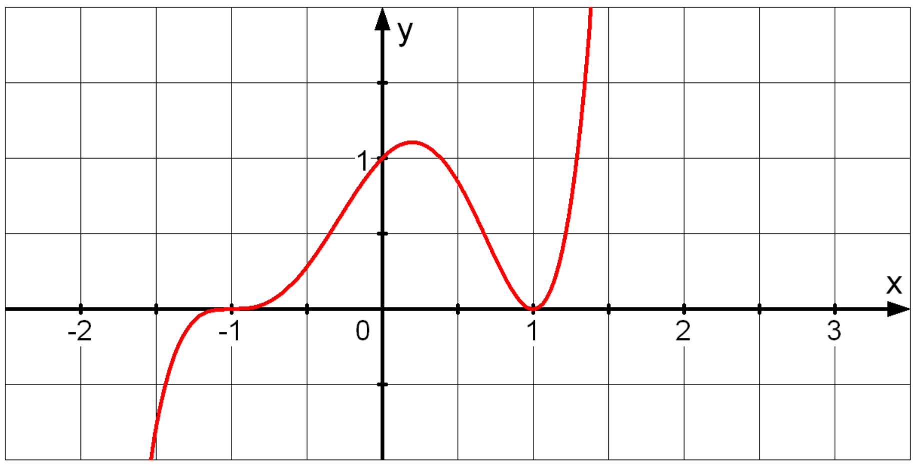
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0{,}2$	$0{,}2 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$5x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	

E_1 ist ein Terrassenpunkt, E_2 ist ein Hochpunkt und E_3 ist ein Tiefpunkt

c) $f''(x) = (x+1)\cdot(5x^2-2x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$

Untersuchung des Krümmungsverhaltens ergibt die Behauptung !

d)



6. Gegeben : $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^2+2}$

1. Definitionsmenge : $D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie : keine

3. Nullstellen : $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+4x}{x^2+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x \cdot (x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -4$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen : $S_{x_1}\left(-4;\,0\right)$ und $S_{x_2}\left(0;\,0\right) = S_y$

4. Randverhalten : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = 1$ und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

Waagrechte Asymptote : $y = 1$

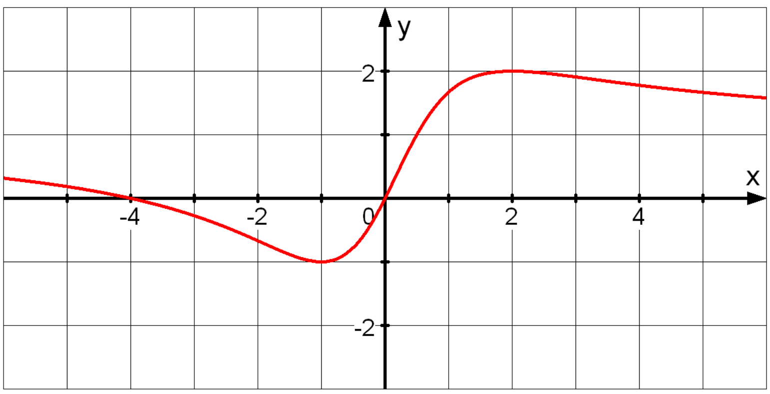
5. Montonie und Extrema : $f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x^2+2)-(x^2+4x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x^2+4x+8}{(x^2+2)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -4x^2+4x+8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \lor x = 2$$

$E_1\left(-1;\,-1\right)$ und $E_1\left(2;\,2\right)$

E_1 ist ein Tiefpunkt und E_2 ist ein Hochpunkt

6. Wendepunkte gibt es, sind aber nicht berechnenbar.



---

7. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{x^2}{(x-1)^2}$, $D = D_{max}$

Definitionsmenge : $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Nullstellen : $x = 0$

Randverhalten :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty \text{ da } \lim_{x \to 1+0} x^2 = 1 \text{ und } \lim_{x \to 1+0} (x-1)^2 = 0+0$$

Analog $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$

Art und Lage der Extrema :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1)^2 - x^2 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$E\left(0; 0\right)$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$-2x$	+	−	−
$(x-1)^3$	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−
	smf	sms	smf

E ist als ein Tiefpunkt des Graphen.

Wendepunkte :

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2 \cdot (x-1) + 6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -0{,}5$$

$W\left(-0{,}5; \frac{1}{9}\right)$

Krümmungsverhalten :

	$-\infty < x < -0{,}5$	$-0{,}5 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$4x+2$	−	+	+

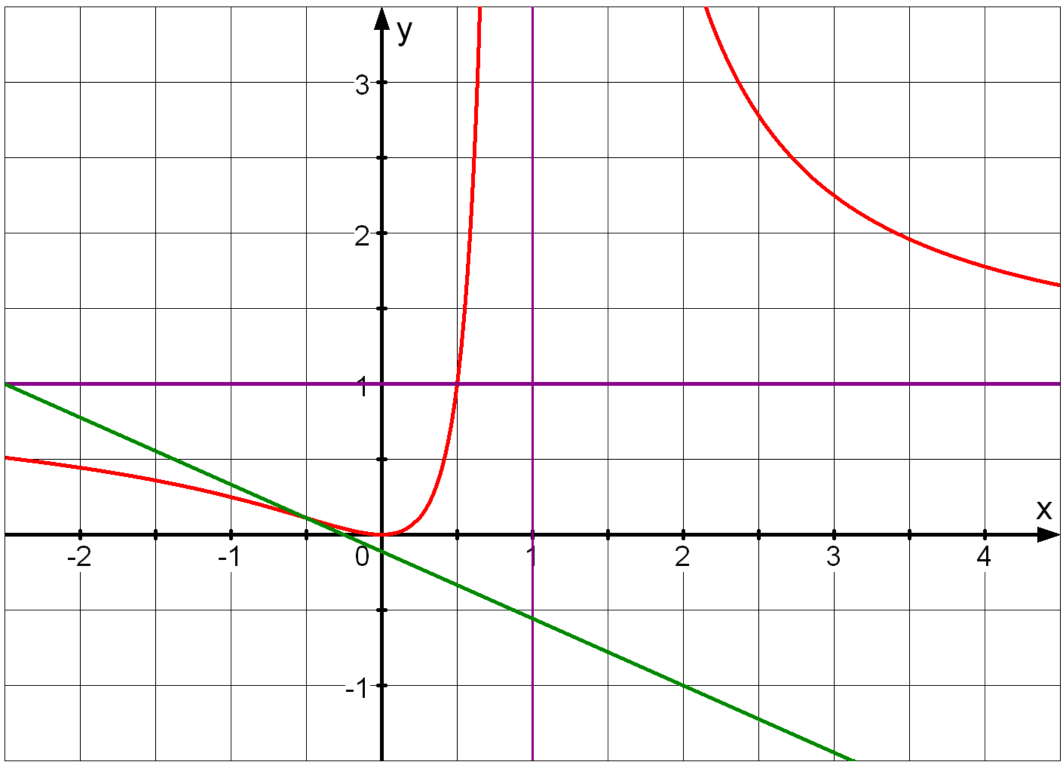
$(x-1)^4$	+	+	+
$f''(x)$	$-$	+	+
	LK	RK	LK

Wendetangente :

$$f'(-0{,}5) = \frac{-2\cdot(-0{,}5)}{(-0{,}5-1)^3} = -\frac{4}{9}$$

$$w: y = -\frac{4}{9}(x+0{,}5)+\frac{1}{9} \qquad y = -\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$$

Graph mit Wendetangente :



8. Gegeben : $f: x \to (1-x^2)\sqrt{x}$, $D = \mathbb{R}_0^+$

a) Nullstellen : $x = 0 \lor x = 1$

b) $f'(x) = -2x\cdot\sqrt{x} + (1-x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-4x\cdot x-1-x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{1-5x^2}{2\sqrt{x}}$

Die Ableitung ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1-5x^2}{2\sqrt{x}} = \infty$$

Der Graph von x schließt an der Stelle $x = 0$ mit der x-Achse einen rechten Winkel ein.

c) $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{0{,}2} \qquad E\left(\sqrt{0{,}2}\,;\, 0{,}8\sqrt[4]{0{,}2}\right)$

Monotonieuntersichung :

	$0 < x < 0{,}2\sqrt{5}$	$0{,}2\sqrt{5} < x$
$1-5x^2$	$+$	$-$
$2\sqrt{x}$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

$0 \le x \le 0{,}2\sqrt{5}$: f ist sms

$0{,}2\sqrt{5} \le x < \infty$: f ist smf

E ist ein Hochpunkt.

d) $$f''(x) = \frac{-10x\cdot 2\sqrt{x} - (1-5x^2)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-15x^2-1}{4x} = -\frac{15x^2+1}{4x} < 0 \text{ für } x > 0$$

Also besitzt der Graph f keine Wendepunkte.

e) Ungefähre Koordinaten des Wendepunkts : $E\left(0{,}45\,;\,0{,}54\right)$