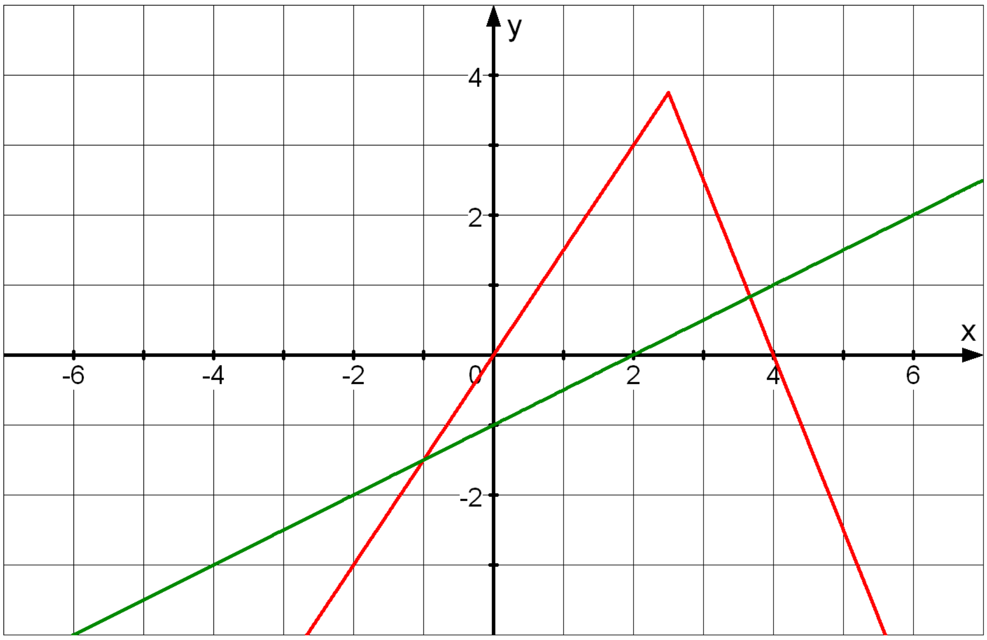
Lösung

===

1\. a) $y = \frac{t}{2}\cdot(-2)+t-2 = -t+t-2 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & , x \le \frac{5}{2} \\ 10-\frac{5}{2}x & , x > \frac{5}{2} \end{cases}$



c) Der Winkel bei H ist der Schnittwinkel zwischen den Geraden mit den Gleichungen

$y = \frac{3}{2}x$ und $y = -\frac{5}{2}x+10$

$$\tan\varphi = \left|\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{1-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}\right| = \left|\frac{4}{1-3{,}75}\right| = \frac{4}{2{,}75} = \frac{16}{11} \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 55{,}5°$$

d) Die Gerade $y = \frac{t}{2}x+t-2$ kann entweder auf $y = \frac{3}{2}x$ oder $y = -\frac{5}{2}x+10$

senkrecht stehen.

$$\frac{t}{2}\cdot\frac{3}{2} = -1 \quad\Rightarrow\quad t = -\frac{4}{3} \quad\vee\quad \frac{t}{2}\cdot(-\frac{5}{2}) = -1 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{4}{5}$$

2\. a) $f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3+3x^2-4 = 0$

Erraten : $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0$

Polynomdivision : $(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 - 4x + 2$

Weitere Nullstellen : $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Undlichkeitsstellen :

$x^3 + 4x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -4$

Undlichkeitstellen : $x = 0$ (ohne VZW) und $x = -4$ (mit VZW)

b) Vorzeichenbetrachtung von $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 4x^4} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)^2}{x^2\cdot(x+4)}$

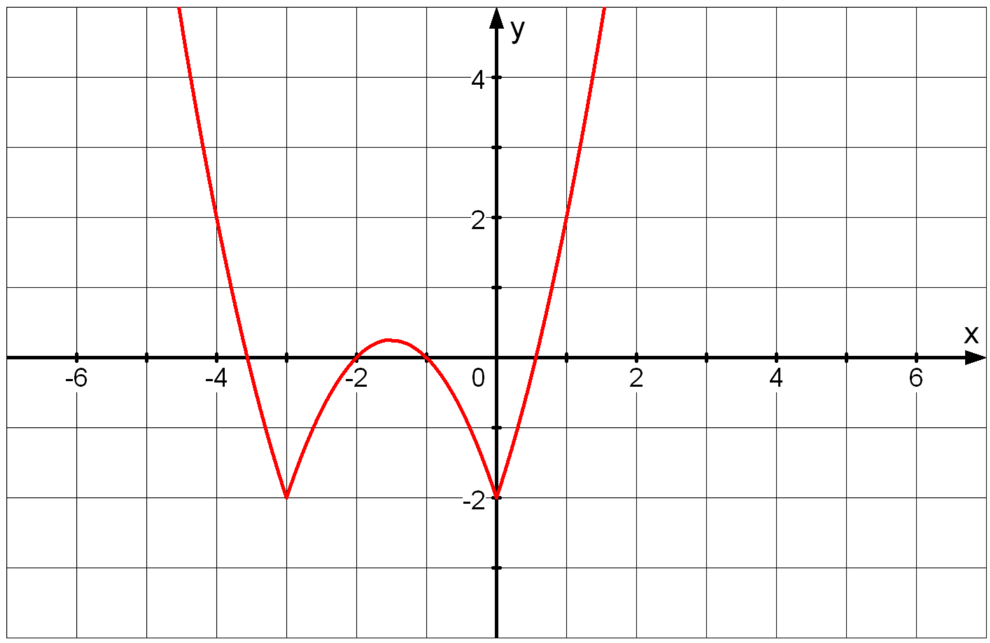
Beachte: Zähler und Nenner müssen faktorisiert werden.

	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

$D_h =]-\infty; -4[\cup]1; \infty[$

---

3. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & , \; x \geq 0 \lor x \leq -3 \\ -x^2 - 3x - 2 & , \; -3 < x < 2 \end{cases}$



b) Die Definitionsmenge von h besteht aus den Intervallen, auf denen f nicht negativ ist.

Bestimmung der Intervallgrenzen (vgl. Graph)

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \;\vee\; x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

$$-x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \;\vee\; x = -2$$

$$D_h = \left]-\infty;\, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-2;\, -1] \cup \left[-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2};\, \infty\right[$$

---

4. a) Mit einer Vorzeichenbetrachtung des Radikanden folgt : $D = \left[-2;\, \frac{7}{3}\right[$

b) Auflösen nach x und Variablentausch

$$y^2 \cdot (7 - 3x) = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7y^2 - 2}{1 + 3y^2} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{7x^2 - 2}{1 + 3x^2}$$

c) Der Graph von f und der Graph von f^{-1} schneiden sich auf der Winkelhalbierenden

$y = x$.

$$\text{Also : } \frac{7x^2 - 2}{1 + 3x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 - 2 = x + 3x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 7x^2 + x + 2 = 0$$

$$\text{Polynomdivision : } (3x^2 - 7x^2 + x + 2) : (x - 2) = 3x^2 - x - 1$$

$3x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \ \vee \ x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$

Es liegt nur $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ in der Defintionsmenge.

Ein weiterer Schnittpunkt ist also $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6} \ ; \ \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right)$

5\. a) Sei $x_2 > x_1$: $\frac{1}{x_2{}^2 - x_2} - \frac{1}{x_1{}^2 - x_1} = \frac{x_1{}^2 - x_1 - x_2{}^2 + x_2}{(x_2{}^2 - x_2)\cdot(x_1{}^2 - x_1)} = \frac{(x_1{}^2 - x_2{}^2) - (x_2 - x_1)}{x_2\cdot(x_2 - 1)\cdot x_1\cdot(x_1 - - 1)} < 0$

weil $x_1{}^2 - x_2{}^2 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - 1 > 0$, $x_1 - 1 > 0$, $x_2 - 1 > 0$ und natürlich $x_1 > 0$ und $x_2 > 0$ ist.

b) Ansatz : $\frac{1}{x^2 - x} = y \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 - yx - 1 = 0$

Bedingung für Lösbarkeit : $D = y^2 + 4y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \leq -4 \ \vee \ y \geq 0$

$y = 0$ ist aber nicht möglich, da dann keine quadratische Gleichung vorliegt.

$W = \,]-\infty; \,-4] \cup \,]0; \infty[$

6\. $f(x) = \left| (x-2)^2 - 4 \right|$ und $f(x) = \left| (x+1)^2 - 1 \right| - 5$
