Musterlösung

(die Aufgaben 3.b), 3.c) und 3.d) zu den komplexen Zahlen sind nur für Interessierte)
==

1.Gegeben : $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

a) Gesucht : Gleichung der ***Tangente*** t_1 an den Graphen von f im Punkt $P\left(3;\,4\right)$

Tangentenformel : $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = -2x + 6 \quad\Rightarrow\quad f'(3) = -2\cdot 3 + 6 = 0$

d.h. t_1 ist eine horizontale Tangente an den Graphen von f.

Gleichung von t_1 : $y = 0\cdot(x-3) + 4 = 4$

b) Gesucht : Gleichung der ***Tangente*** t_2 an den Graphen von f im Punkt $Q\left(1;\,0\right)$ und Gleichung der ***Normale***n n in diesem Punkt

$f'(1) = -2\cdot 1 + 6 = 4$

Gleichung von t_2 : $y = 4\cdot(x-1) + 0 = 4x - 4$

Steigung der Normalen : $m_n\cdot 4 = = -1$

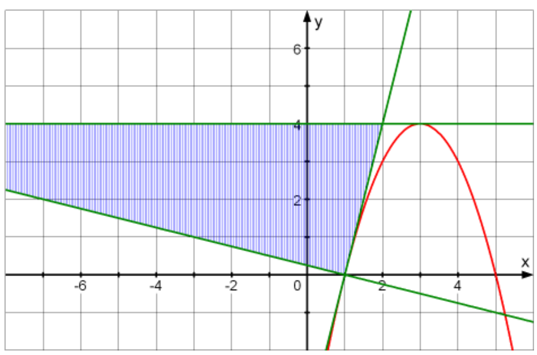
Gleichung von n : $y = -\frac{1}{4}\cdot(x-1) + 0 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

c) Gesucht : Größe des ***Schnittwinkels*** φ von t_1 und t_2

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{f'(3) - f'(1)}{1 + f'(3)\cdot f'(1)}\right| = \left|\frac{0\ -\ 4}{1 + 0\cdot 4}\right| = 4 \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 76°$$

d) Gesucht : ***Flächeninhalt*** $\mathfrak{A}$ des Dreiecks, das von t_1, t_2 und n eingeschlossen wird.

Skizze :



Schnitt von t_1 und n : $4 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -15$

Schnitt von t_1 und t_2 : $4 = 4x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Flächeninhalt : $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \cdot (15 + 2) \cdot 4 = 34$

---

2. Gegeben : $f(x) = x^3 + ax^2$

a) Gesucht : a so, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ eine waagrechte Tangente besitzt

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

Bedingung : $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 12 + 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$

b) Gesucht : Monotonieverhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \cdot (x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$3x$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x) = 3x \cdot (x - 2)$	$+$	$-$	$+$
	sms	smf	sms

c) f hat an der Stelle $x_0 = 2$ einen Tiefpunkt.

---

3. Gegeben : $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9$

a) $f'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 12 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 3x - 9 \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(x) = 3 \neq 0$

$f'''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

$f(3) = 0{,}5 \cdot 3^3 - 4{,}5 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 9 = 0$

Also liegt der Wendepunkt des Graphen von f auf der x-Achse.

b) Gesucht : Weitere Nullstellen von f .

$f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = 0$

Polynomdivision : $(x^3 - 9x^2 + 24x - 18) : (x - 3) = x^2 - 6x + 6$

Weitere Nullstellen : $x^2 - 6x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$

c) Gesucht : Art und Lage der Extrema von f

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \lor x = 4$

$f''(2) = 3 \cdot 2 - 9 = -3$ und $f''(4) = 3 \cdot 4 - 9 = 3$

$f(2) = 0{,}5 \cdot 2^3 + 4{,}5 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = 4 - 18 + 24 - 9 = 1$

und

$f(4) = 0{,}5 \cdot 4^3 + 4{,}5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 - 9 = 32 - 72 + 48 - 9 = -1$

Damit ist $E_1\left(2;\ 1\right)$ ein Hochpunkt und $E_2\left(4;\ -1\right)$ ein Tiefpunkt.

---

4. Gegeben : $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1$ mit $D = \mathbb{R}$

a) $f(-x) = \frac{1}{8} \cdot (-x)^4 - (-x)^2 - 1 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1 = f(x)$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Gesucht : Nullstellen von

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 8x^2 - 8 = 0$

Substitution : $x^2 = u$

$u^2 - 8u - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 4 - 2\sqrt{6} \ \lor \ x = 4 + 4\sqrt{6}$

Resubstitution : $u = x^2$

$x^2 = 4 - 2\sqrt{6}$ besitzt keine Lösung

$x^2 = 4 + 2\sqrt{6}$ besitzt die Lösungen $x = -\sqrt{4 + 2\sqrt{6}} \approx -3 \quad \lor \quad x = \sqrt{4 + 2\sqrt{6}} \approx 3$

c) Gesucht : Monotonieverhalten und Art und Lage der Extrema

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -2 \lor x = 2$

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 4)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	smf	sms	smf	sms

$f(-2) = f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^4 - 2^2 - 1 = 2 - 4 - 1 = -3$ und $f(0) = -1$

$E_1\left(0;\ -1\right)$ ist ein Hochpunkt und $E_2\left(-2;\ -3\right)$ sowie $E_3\left(2;\ -3\right)$ sind Tiefpunkte.

d) Gesucht : Krümmungsverhalten und Wendepunkte

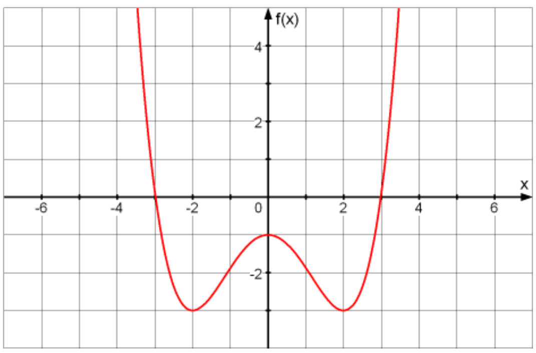
$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1{,}2 \ \vee \ x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}2$$

	$-\infty < x < -\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \infty$
$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$	+	−	+
	LK	RK	LK

$$f(-\sqrt{\frac{4}{3}} = f(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{1}{8} \cdot (\frac{4}{3})^2 - \frac{4}{3} - 1 = -\frac{19}{9}$$

$W_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\ ;\ -\frac{19}{9}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\ ;\ -\frac{19}{9}\right)$ sind Wendepunkte des Graphen von f.

e)



---

6. Gegeben : $f_a(x) = 1 - ax^2$ und $g(x) = x^2$

Gesucht : a so, dass sich die Graphen von f_a und g rechtwinklig schneiden

$f_a'(x) = -2ax$ und $g'(x) = 2x$

Bedingungen :

(1) $\quad 1 - ax^2 = x^2 \quad$ (2) $\quad -2ax \cdot 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4a}$

(2) in (1) eingesetzt

$$1 - a\cdot\frac{1}{4a} = \frac{1}{4a} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4a} \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{1}{3}$$

---

7. Gegeben : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ und $y = -\frac{1}{5}x$

Gesucht : a, b, c

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

(1) $f(0) = c = 0$ da die Normale die y-Achse in $O\left(0;\, 0\right)$ schneidet

(2) $f'(0) = b = 5$

(3) $f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3 + 2a + b = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 8 + 2a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -4$

Komplexe Zahlen

==

1. a) $\frac{6+7i}{2-3i} = \frac{(6+7i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-9+32i}{13} = -\frac{9}{13} + \frac{32}{13}i$

b) $\left(4-\sqrt{-3}\right)\left(5+\sqrt{-1}\right) = (4-\sqrt{3}i)(5+i) = 20+\sqrt{3}+(4-5\sqrt{3})i$

c) $\frac{(1-2i)^2}{1-3i} - \frac{i}{1+2i} = \frac{1-4i-4}{1-3i} - \frac{i\cdot(1-2i)}{1+4} = \frac{(-3-4i)(1+3i)}{1+9} - \frac{i+2}{5} =$

$= \frac{-3-9i-4i+12}{10} - \frac{i+2}{5} = \frac{9-13i}{10} - \frac{2i+4}{10} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

---

2. a) $\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)\cdot(3+4i)}{9+16} + \frac{20\cdot(4-3i)}{16+9} = \ldots\ldots = 3-i$

b) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2} = \frac{10+15i}{2i} = 7{,}5-5i$

c) $3\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 3\cdot i^2 - 2\cdot(-i)^3 = -3-2i$

---

3. a) $5z^2 + 2z + 10 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad z^2 + \frac{2}{5}z = -2 \quad\Leftrightarrow\quad z^2 + \frac{2}{5}z + \frac{1}{25} = -\frac{49}{25}$

$$\left(z+\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{49}{25} \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{5}-\frac{4}{5}i \vee z = -\frac{1}{5}+\frac{4}{5}i$$

b) $z^2 = 1+i$

Ansatz : $z = x+iy$

$(x+iy)^2 = 1+i \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2xyi-y^2 = 1+i \quad \Leftrightarrow \quad (1)\ x^2-y^2 = 1 \quad (2)\ 2xy = 1$

$(2) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2x}$

in (1) eingesetzt $\Rightarrow \quad x^2-\dfrac{1}{4x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4-1 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4-4x^2-1 = 0$

Substitution : $x^2 = u$

$4u^2-4u-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee\ x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Resubstitution : $u = x^2$

$x^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ besitzt keine Lösung, das das Quadrat der reellen Z

$x^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ besitzt die Lösungen $x = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})} \ \vee\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}$

Eingesetzt in (2) ergibt sich

$$y = \frac{1}{-2\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{-2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{-1-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{(-1+\sqrt{2})\cdot(-1-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{(-1+\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{1-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-1+\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{-1} = -\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\cdot(-1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(-1+\sqrt{2})\cdot(-1+2)} = -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(-1+\sqrt{2})}$$

Analog ergibt sich das zu $x = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}$ gehörende y zu $y = \sqrt{-\frac{1}{2}\cdot(-1+\sqrt{2})}$

c) $z^2+8z+30i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+8z+16 = 16-30i$

$(z+4)^2 = 16-30i$

Substitution : $u = z+4$ ergibt $u^2 = 16-30i$

Der Ansatz $u = x+iy$ und Rechnung wie in Aufgabe b) ergibt

$u = -5+3i$ oder $u = 5-3i$ und damit $z = -9+3i$ oder $z = z = 1-3i$

d) $z^4+z^2+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

---

4. Gegeben : $z_1 = 4+3i$, $z_2 = 4-3i$ und $z_3 = -2+3i$

$\left|z_1-z_2\right| = \left|6i\right| = 6$, $\left|z_1-z_3\right| = \left|6\right| = 6$ und $\left|z_2-z_3\right| = \left|6-6i\right| = 6\sqrt{2}$

Umfang $\mathfrak{U} = 12+6\sqrt{2}$
