Grenzwerte von Funktionen

==

Das Verhalten im Unendlichen - Konvergenz

Beispiel : $f : x \to \frac{2x}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

Wertetabelle

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**9**	**99**	999
f(x)	0	1	1,33..	1,5	1,6	1,8	1,98	1,998
2 – f(x)	2	1	0,66..	0,5	0,4	0,2	0,02	0,002

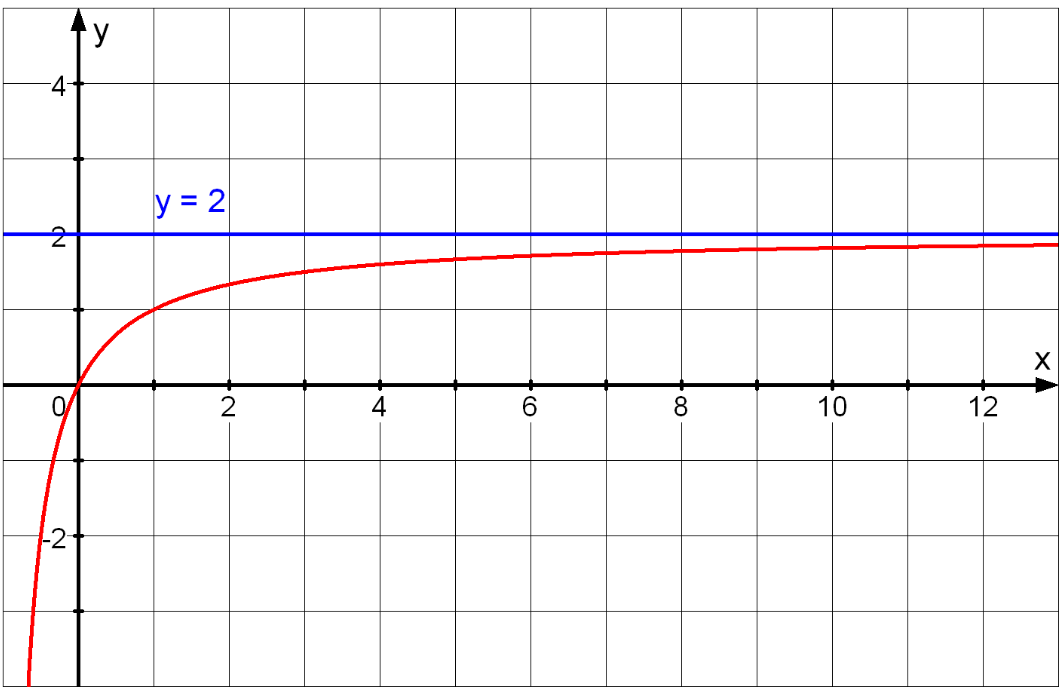
Ergebnis : Der Funktionswerte von f nähern sich immer mehr dem Wert 2 an.

Man nennt 2 daher den Grenzwert der Funktion f, wenn x unendlich groß wird und schreibt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

und spricht "Der Limes von $\frac{2x}{x+1}$ für x gegen ∞ ist gleich 2".

Graphische Veranschaulichung :



Für den Graphen der Funktion f bedeutet das, dass er sich immer mehr der waagrechten Geraden $y = 2$ nähert.

Man nennt die Gerade $y = 2$ eine waagrechte Asymptote des Graphen der Funktion.

Verallgemeinerung :

Definition :

Eine Funktion f, deren Definitionsbereich nach oben nicht beschränkt ist, hat für $x \to \infty$ den ***Grenzwert*** a, wenn es zu jeder (noch so kleinen) positiven Zahl ε ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\left| a - f(x) \right| < \varepsilon$$

für alle $x > s$ ist.

Einfach gesprochen : Der Abstand zwische a und den Funktionswerten f(x) wird beliebig klein, wenn x nur groß genug gewählt wird.

Man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

und sagt ***f konvergiert gegen a***.

Die Gerade $y = a$ heißt dann (waagrechte) ***Asymptote*** von G_f. für $x \to \infty$.

Analog definiert man $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

Beispiel : Bestimme s so, dass $\left| 2 - \frac{2x}{x+1} \right| < 0{,}01$ ist, falls $x >$ s ist.

$$\left| 2 - \frac{2x}{x+1} \right| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{2\cdot(x+1) - 2x}{x+1} \right| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{2}{x+1} \right| < 0{,}01$$

Wenn $x > -1$ ist, darf man die Betragsstriche weglassen.

$$\frac{2}{x+1} < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < 0{,}01x + 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}99 < 0{,}01x \quad \Leftrightarrow \quad 199 < x$$

Wählt man als $s = 199$, dann gilt $\left| 2 - \frac{2x}{x+1} \right| < 0{,}01$ für alle $x > s$.

Beachte :

"⇔" ist das **Äquivalenzzeichen**.

Zwischen dem Äquivalenzzeichen stehen nur formveränderte Gleichungen oder Ungleichungen.

Grenzwertrechenregeln

Satz :

Ist $\lim\limits_{x \to \infty} \mathbf{f(x) = a}$ sowie $\lim\limits_{x \to \infty} \mathbf{g(x) = b}$, dann gilt

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\mathbf{f(x) + g(x)} \right] = \mathbf{a + b}$ **bzw.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\mathbf{f(x) - g(x)} \right] = \mathbf{a - b}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\mathbf{f(x) \cdot g(x)} \right] = \mathbf{a \cdot b}$ (3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, falls $b \neq 0$ ist.

Wichtige Grundfunktionen sind z. B. die Potenzfunktionen

$f : x \to x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : x \to x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Für sie gilt

Satz :

Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^n}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^n}} = \mathbf{0}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$

Beweis : trivial

Beispiel :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5 - 6x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x^2} - 6} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{x^2}}{5 \cdot \frac{1}{x^2} - 6} = \frac{2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{5 \cdot 0 - 6} = -\frac{1}{3}$$

Ansonsten benützt man zum Nachweis der Konvergenz auch Abschätzungen.

Beispiel :

Gegeben ist $f : x \to \frac{\sin x}{x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

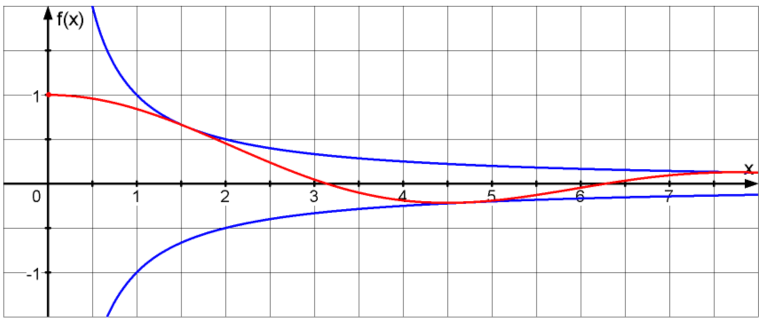
Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ gilt dann $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ d.h. $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$

Für die Funktion

$g : x \to \frac{1}{x}$ gilt aber $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Also muss dann auch $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ sein

Graphischen Darstellung :



In der Mitte ist der Graph der Funktion $f : x \to \frac{\sin x}{x}$, der von den Graphen der Funktion

$g_1 : x \to \frac{1}{x}$ und $g_2 : x \to -\frac{1}{x}$ eingeschlossen wird.

1. Schrankensatz :

Sind f und g zwei Funktionen mit nach oben unbeschränktem Definitionsbereich und ist

$$\left|f(x)\right| \leq \left|g(x)\right|$$

für alle genügend großen x sowie $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, dann ist auch $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Analoges gilt auch für $x \to -\infty$

Ein anloges Ergebnis ergibt sich, wenn der Graph einer Funktion f von den Graphen zweier Funktionen g und h mit gleichen Grenzwerten im Unendlichen eingeschlossen wird.

2. Schrankensatz :

Sind f, h und g drei Funktionen mit nach oben unbeschränktem Definitionsbereich mit

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

für alle genügend großen x und ist $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = a$, dann ist auch

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Analoges gilt auch für $x \to -\infty$

Beispiel :

Gegeben ist die Funktion $f : x \to \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Für f gilt die Abschätzung

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}} \leq \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2x+1}{\sqrt{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+1} \leq \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2x+1}{x}$$

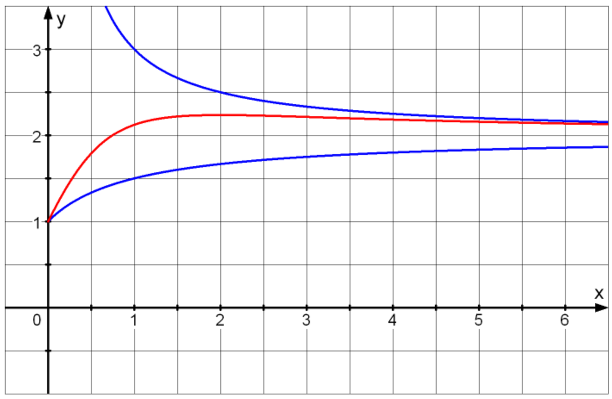
falls $x > 0$ ist.

Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$

ist daher auch

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 2$$

Das folgende Bild zeigt die Graphen von $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ (rot) sowie von $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ und $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ (beide blau) für $x > 0$.



Ein wichtiger Grenzwert

Für die Funktion $f : x \to \frac{\sin x}{x}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Beispiel :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\frac{2}{3} \cdot 3x} = \lim_{o \to 0} \frac{\sin u}{\frac{2}{3} \cdot u} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ mit } u = 3x$$

Divergenz

Hat eine Funktion für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ keinen Grenzwert, dann sagt man, die Funktion divergiert im Unendlichen.

Zwei Arten der Divergenz sind möglich

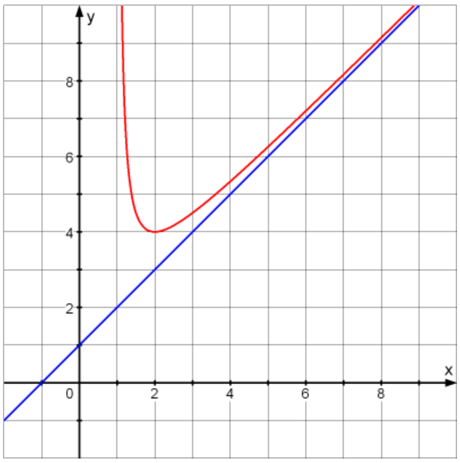
a) **Beispiel :** $f : x \to \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, $D =]1; \infty[$

Polynomdivision : $(x^2 + 1) : (x - 1) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$

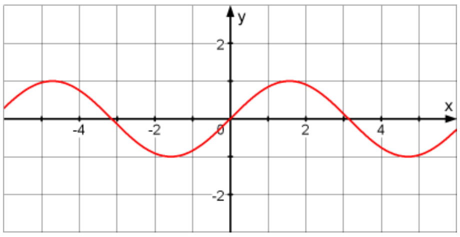
Wegen $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x + 1}$ und $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x - 1} = 0$

überschreitet bzw. unterschreitet f(x) für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ jede noch so große bzw. jede noch so kleine Zahl. Man spricht von **bestimmter Divergenz**.

Der Graph der Kurve nähert sich der Geraden $y = x + 1$ an. Man nennt sie **schiefe Asymptote** des Graphen.



b) **Beispiel :** $f : x \to \sin x$, $D = \mathbb{R}$



Die Funktion nimmt für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ jeden Wert im Intervall $[-1; 1]$ immer wieder an. Sie oszilliert.

Man spricht von **unbestimmter Divergenz**.

Definition :

Eine Funktion f, deren Definitionsbereich nach oben nicht beschränkt ist, hat für $x \to \infty$ den uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$, wenn es zu jeder (noch so großen) positiven Zahl μ ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) > \mu \quad \forall\, x > s \;\text{ bzw. }\; f(x) < -\mu \quad \forall\, x > s$$

Man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \;\text{ bzw. }\; \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Analog definiert man die beiden uneigentlichen Grenzwerte für $x \to -\infty$

Man spricht in diesem Fall von **bestimmter Divergenz**, andernfalls von unbestimmter **Divergenz**.

Das Verhalten im Endlichen

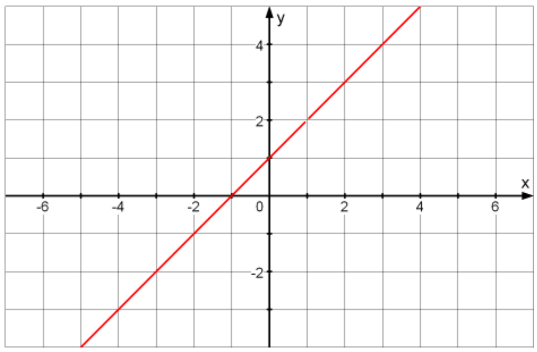
Beispiel :

$f : x \to \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und $g : x \to \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

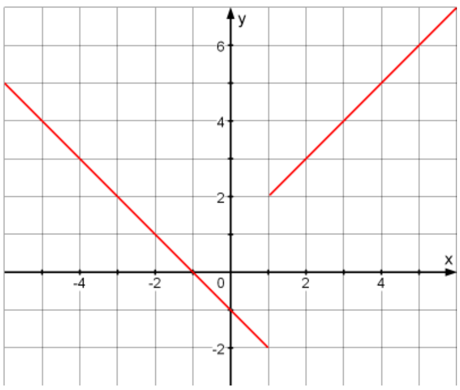
Eine Vereinfachung der Funktionsterme von f bzw. die betragsfreie Darstellung von g(x) ergibt

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \text{ bzw. } g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1 & , \text{ falls } x > 1 \\ \dfrac{x^2-1}{-x+1} = -x+1 & , \text{ falls } x < 1 \end{cases}$$

Graph von f :



Die Funktionswerte von f nähern sich dem Wert 2, wenn man sich der Definitionlücke $x_0 = 1$ nähert. Man sagt f besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ den Grenzwert 2 und schreibt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$



Die Funktionwerte von g nähern dem Wert 2, wenn man sich von rechts der Definitionslücke $x_0 = 1$ nähert und dem Wert -2, wenn man sich von links der Defintionslücke nähert.

Man sagt, g besitzt den rechtsseitigen Grenzwert 2 und den linksseitigen Grenzwert -2 und schreibt

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(x) = 2$ und $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x) = -2$

Bestimmung von Grenzwerten

---

a) mittels Termumformung

Beispiel :

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2-9} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-2}{x-3} = \frac{5}{6}$$

Begründung (siehe Stetigkeit)

b) mit der h-Methode

Bei der praktischen Berechnung von Grenzwerten bildet man die Funktionswerte von f an den Stellen $x_0 + h$ und $x_0 - h$ und untersucht das Verhalten dieser Funktionswerte, wenn h gegen Null geht.

Beispiel :

Für $f : x \to \frac{x^2-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $x_0 = 1$ gilt

Rechtsseitiger Grenzwert :

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{1+h-1} = \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

Linkseitiger Grenzwert :

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0-h) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2-1}{(1-h)-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2h+h^2-1}{1-h-1} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h+h^2}{-h} = \lim_{h \to 0} (2-h) = 2$$

Eine Funktion besitzt dann genau dann an der Stelle x_0 einen Grenzwert, wenn linksssseitiger Grenzwert und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.

Grenzwertsätze

Existieren für die Funktionen f und g die Grenzwerte an der Stelle x_0 und ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ sowie } \lim_{x \to x_0} g(x) = b,$$

dann gilt

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = a + b$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = a - b$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = a \cdot b$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ falls $b \neq 0$ ist.

Divergenz an Definitionslücken

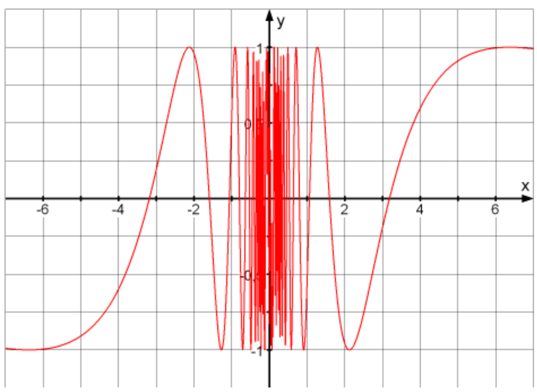
Besitzt eine Funktion f an der Definitionslücke x_0 keinen Grenzwert,

so sind drei Grundtypen des Verhaltens einer Funktion f an der Stelle x_0 denkbar

a) Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, sind aber nicht gleich.

b) Die Funktion oszilliert in den Umgebung von x_0 so, dass links- oder rechtsseitige Grenzwert nicht existieren.

Graphisches Beispiel : Oszillation in der Umgebung von $x_0 = 0$



c) Die Funktionswerte werden mit Annäherung an die Definitionslücke x_0 vom Betrag her beliebig groß. Man schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

Die Gerade $x = x_0$ heißt dann eine **senkrechte Asymptote** des Graphen von f.

Der Nachweis dieses Verhaltens kann mit der h-Methode erfolgen.

Beispiel :

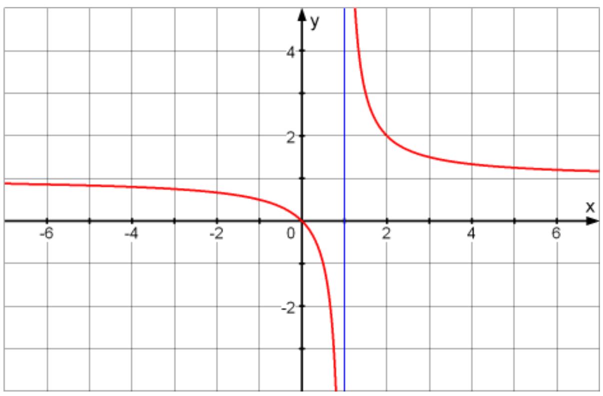
$f : x \to \frac{x}{x-1}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1-h}{(1-h)-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1-h}{-h} = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h}+1\right) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1+h}{(1+h)-1} = \lim_{h \to 0} \frac{1+h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}+1\right) = \infty$$

Graph mit senkrechter Asymptote (blau)

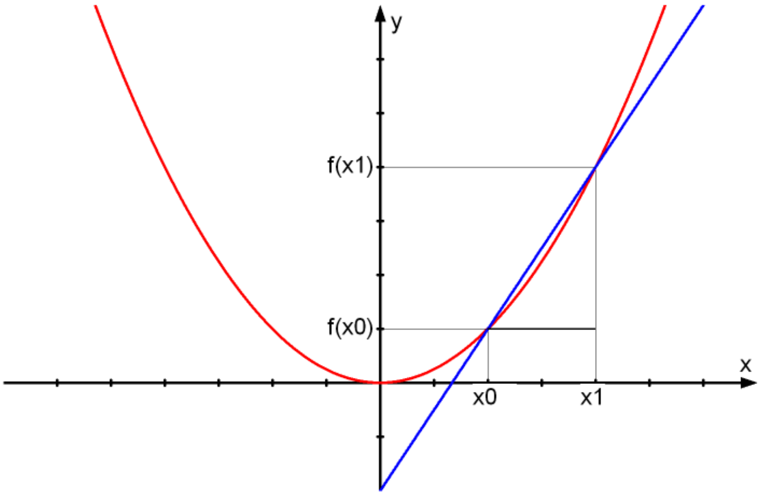


Die Ableitung einer Funktion

==

Tangenten an Parabeln

Schneidet eine Gerade eine Parabel in zwei Punkten, dann nennt man sie eine **Sekante** der Parabel. Hält man einen Schnittpunkt fest und bewegt den zweiten gegen ihn, dann geht die Sekante in eine **Tangente** über, die dann mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam hat.



Steigung der Sekante durch die Punkte $P(x_0\,;\,y_0 = x_0^2)$ und $Q(x_1\,;\,y_1 = x_1^2)$:

$$m_S = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}$$

Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0\,;\,y_0 = x_0^2)$:

$$m_T = \lim_{x_1 \to x_0} m_S = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} (x_1 + x_0) = 2x_0$$

Ergebnis :

Die Tangente an den Graphen der quadratischen Funktion

$f : x \to y = x^2$

im Punkt $P(x_0\,;\,y_0 = x_0^2)$ hat die Steigung

$$\boxed{\mathbf{m_T = 2x_0}}$$

Berechnung der Steigung der Tangente mit der h-Methode :

Steigung der Sekante bei Annäherung von rechts bzw. links:

$$m_S^+ = \frac{(x_o + h)^2 - x_0^2}{(x_0 + h) - x_0} = = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{(2x_0 + h) \cdot h}{h} = 2x_0 + h$$

bzw.

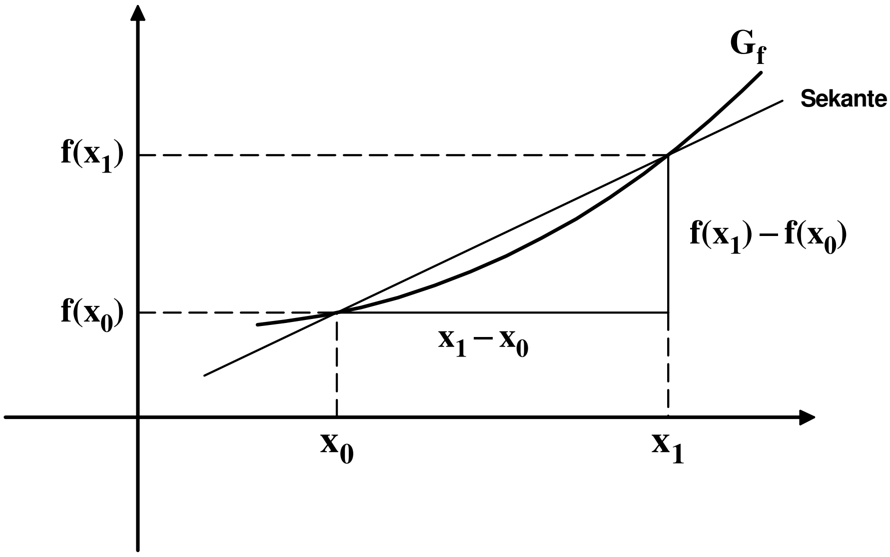
$$m_S^- = \frac{(x_o - h)^2 - x_0^2}{(x_0 - h) - x_0} = \frac{x_0^2 - 2x_0h + h^2 - x_0^2}{-h} = \frac{(-2x_0 + h)h}{-h} = 2x_0 - h$$

Steigung der Tangente :

Rechtsseitiger Grenzwert : $\lim\limits_{h \to 0} m_S^+ = \lim\limits_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$

Linksseitiger Grenzwert : $\lim\limits_{h \to 0} m_S^- = \lim\limits_{h \to 0} (2x_0 - h) = 2x_0$

Verallgemeinerung



Die Funktion f sei für alle x in der Nähe von x_0 definiert.

1. Die Sekante durch die Punkte $P(x_0 ; y_0)$ und $P(x_1 ; y_1)$ des Graphen von f hat die Steigung

$$\boxed{m_S = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Man nennt diesen Bruch auch **Differenzenquotienten**.

2. Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 ; y_0)$ ergibt sich dann zu

$$\boxed{\mathbf{m_T = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}} ,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Die Funktion f heißt in diesem Fall an der Stelle x_0 **differenzierbar** und man schreibt

$$\boxed{\mathbf{\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)}}$$

und nennt $f'(x_0)$ die **Ableitung** oder den **Differentialquotienten** von f an der Stelle x_0.

Existiert obiger Grenzwert nicht, dann heißt f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Es lässt sich dann im Punkt $P(x_0 ; y_0)$ entweder nicht eindeutig eine Tangente an den Graphen von f legen oder die Tangente verläuft vertikal (senkrecht).

Die Bestimmung der Ableitung erfolgt meist mit der h-Methode :

$\mathbf{f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$ heißt ***rechtsseitige Ableitung***.

$\mathbf{f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}}$ heißt ***linksseitige Ableitung***.

Bedingung für die ***Differenzierbarkeit*** : $\mathbf{f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}$

Beispiel einer an einer Stelle x_0 nicht differenzierbaren Funktion :

$f : x \to x \cdot \left| x - 3 \right|$ ist in $x_0 = 3$ nicht differenzierbar .

Nachweis :

1. Betragsfreie Darstellung von f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x , & x \geq 3 \\ 3x - x^2, & x < 3 \end{cases}$

2. Rechtsseitige Ableitung :

$$f_+^{'}(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3(3+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (3 + 3h) = 3$$

3. Linksseitige Ableitung

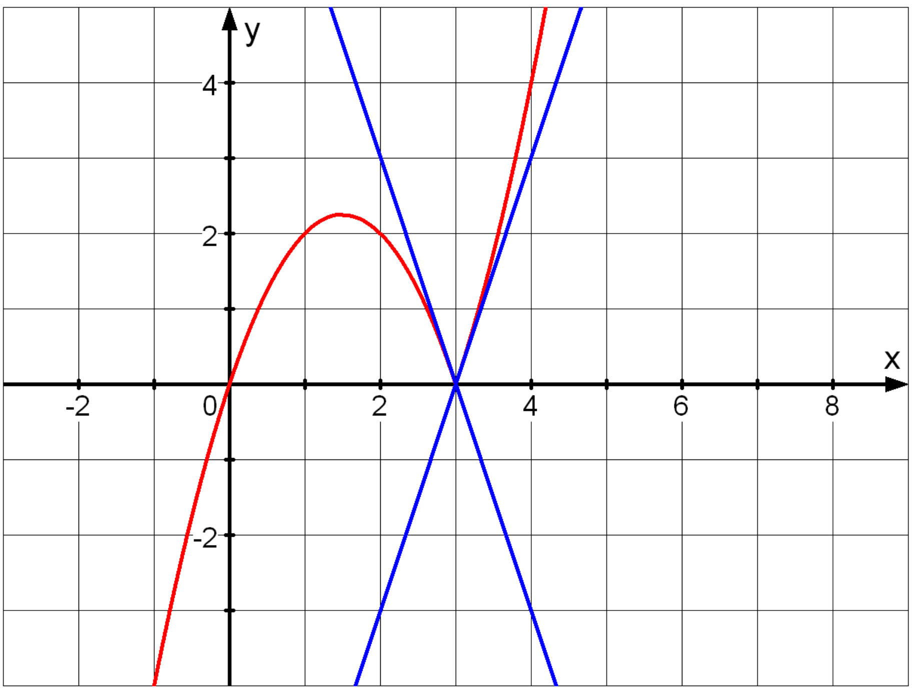
$$f_-^{'}(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(3-h) - (3-h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h - h^2}{-h} =$$

$$= = \lim_{h \to 0} (-3 + 3h) = -3$$

Die Funktion ist nicht differenzierbar d.h. im Punkt P(3; 0) läßt sich keine Tangente an den Graphen der Funktion legen.

Anschaulich klar wird dies, wenn man den Graphen der Funktion zeichnet.

Der Graph von f macht in P einen Knick. Es lassen sich lediglich zwei ***Halbtangenten*** an den Graphen legen, die einen ***Knickwinkel*** miteinander einschließen.



Stetigkeit
==

Definition

Sei x_0 ein Element der Definitionsmenge D einer Funktion f. Für das Verhalten von f an der Stelle x_0 sind drei Möglichkeiten denkbar

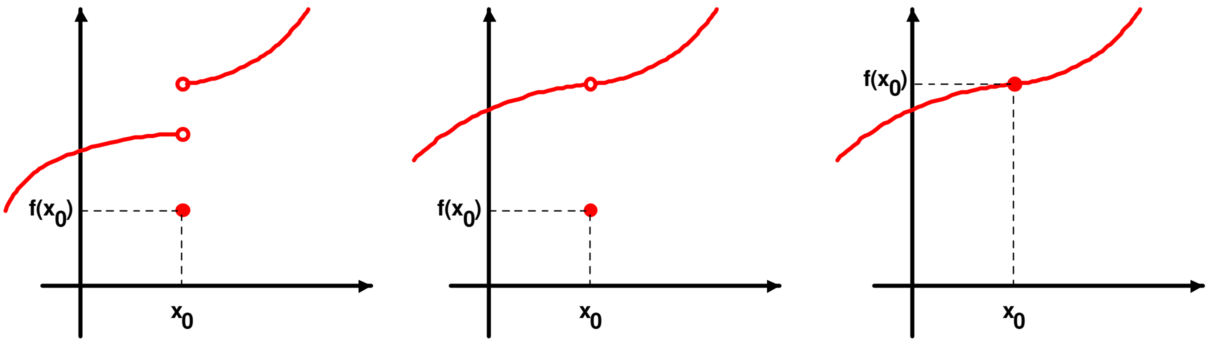


Bild 1 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht

Bild 2 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, aber er ist ungleich $f(x_0)$

Bild 3 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

Definition :

Eine Funktion f heißt in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs D **stetig,** wenn

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

Stimmt der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 überein, dann heißt die Funktion links- bzw. rechtsseitig stetig in x_0.

Beispiel :

Die Quadratfunktion $f : x \to x^2$, $D = \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt ihres Definitiosbereichs stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rechtseitiger Grenzwert :

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} (x_0+h)^2 = \lim_{h \to 0} (x_0{}^2+2hx_0+h^2) = x_0{}^2 = f(x_0)$$

Linksseitiger Grenzwert :

$$\lim_{h \to 0} f(x_0-h) = \lim_{h \to 0} (x_0-h)^2 = \lim_{h \to 0} (x_0{}^2-2hx_0+h^2) = x_0{}^2 = f(x_0)$$

Bemerkung :

Hat eine Funktion f an der Definitionlücke x_0 den Grenzwert a, dann heißt die Funktion $\bar{f}$ mit

$$\bar{f} : x \to \begin{cases} f(x) \ , & x \neq x_0 \\ a \ , & x = x_0 \end{cases}$$

eine in x_0 **stetige Fortsetzung** von f .

Stetigkeitsregeln für zusammengesetzte Funktionen

Satz :

Sind f und g zwei in $x_0 \in D_f \cap D_g$ stetige Funktionen, dann sind auch die Funktionen

(1) $\mathbf{f+g : x \to f(x)+g(x)}$

(2) $\mathbf{f \cdot g : x \to f(x) \cdot g(x)}$

in x_0 stetig.

Ist $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ in x_0 stetig.

Beweis :

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

Folgerung :

1. Jede ganzrationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

2. Jede gebrochen rationale Funktion ist auf D_{max} stetig.

Stetigkeitsregel für Verknüpfung von Funktionen
==
Beispiel :

Ist $g : x \rightarrow x^2 + 1$ und $f : x \rightarrow \sqrt{x}$

$f \circ g : x \rightarrow f[g(x)] = \sqrt{x^2 + 1}$ heißt dann die Verknüpfung von f und g.

Definition :

Sind $g : x \rightarrow g(x)$ und $f : x \rightarrow f(x)$ Funktionen und der Term $f[g(x)]$ definiert, dann heißt

die Funktion $f \circ g : x \rightarrow f[g(x)]$ die Verknüpfung von f und g.

Satz :

Seien f und g zwei stetige Funktionen so, dass die Verknüpfung $f \circ g$ möglich. ist

Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ stetig.

Anwendungsbeispiel :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1}} = 1$$

da $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ und die Wurzelfunktion stetig ist.
