Wiederholung : Komplexe Zahlen

1. Stelle in (näherungsweise) in Polarform dar

a) $-3+4i$ b) $-12-5i$ c) $-2+6i$

---

2. Berechne

a) $(-1+\sqrt{3}i)^6$ b) $(1+i)^{10}$

---

3. a) Bestimme die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ und stelle sie in der komplexen Ebene dar.

b) Berechne das Produkt dieser Lösungen

---

4. Gib das Ergebnis in der Form $a+bi$ an.

a) $2 \cdot E(20°) \cdot 4 \cdot E(40°) \cdot 6 \cdot E(60°)$ b) $\dfrac{4 \cdot E(20°)}{12 \cdot E(320°)}$

---

5. Bestimme die Lösungen

a) $z^6 = -1$ b) $z^4 = -8+8\sqrt{3}i$ c) $z^6 = -i$

---

6. Es ist $\sin\alpha = 0{,}6$. Berechne $\sin 3\alpha$.

---

7. Bestimme die Lösung : $(z+i)^4 = -1$

Lösungen :

1. a) Betrag der komplexen Zahl : $\sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

$\tan\varphi^* = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \varphi^* \approx 53{,}13° \Rightarrow \varphi \approx 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$

Polarform : $-3+4i \approx 5 \cdot E(126{,}87°)$

b) Betrag der komplexen Zahl : $\sqrt{(-12)^2+(-5)^2} = 13$

$\tan\varphi^* = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \varphi^* \approx 22{,}62° \Rightarrow \varphi \approx 180° + 22{,}62° = 202{,}62°$

Polarform : $-12-5i \approx 13 \cdot E(202{,}62°)$

c) Betrag der komplexen Zahl : $\sqrt{(-2)^2+6^2} = 2\sqrt{10}$

$\tan\varphi^* = \frac{6}{2} \Rightarrow \varphi^* \approx 71{,}57° \Rightarrow \varphi \approx 360° - 71{,}57° = 288{,}43°$

Polarform : $2-6i \approx 2\sqrt{10}\cdot E\left(288{,}43°\right)$

---

2. a) Polarform : $-1+\sqrt{3}\,i = 2\cdot E\left(120°\right)$

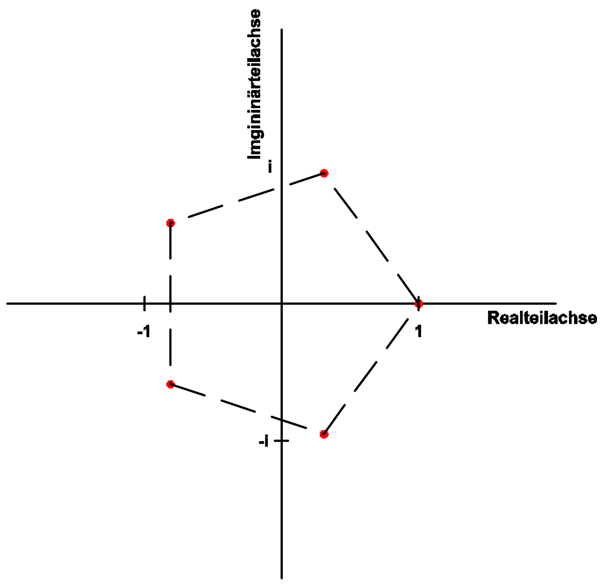
$\Rightarrow \quad (-1+\sqrt{3}i)^6 = \left[2\cdot E(120°)\right]^6 = 2^6\cdot E\left(720°\right) = 2^6\cdot E\left(0°\right) = 64$

b) Polarform : $1+i = \sqrt{2}\cdot E\left(45°\right)$

$\Rightarrow \quad (1+i)^{10} = \left[\sqrt{2}\cdot E\left(45°\right)\right]^{10} = 2^5\cdot E\left(450°\right) = 2^5\cdot E\left(90°\right) = 32i$

---

3. a) $z^5 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \lor z = E\left(72°\right) \lor z = E\left(144°\right) \lor z = E\left(216°\right) \lor z = E(288°)$



b) $1\cdot E\left(72°\right)\cdot E\left(144°\right)\cdot E\left(216°\right)\cdot E\left(288°\right) = E\left(72°+144°+216°+288°\right) = E\left(720°\right) = 1$

---

4. a) $2\cdot E\left(20°\right)\cdot 4\cdot E\left(40°\right)\cdot 6\cdot E\left(60°\right) = 48\cdot E\left(20°+40°+60°\right) = 48\cdot E\left(120°\right) = -24+24\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{4\cdot E\left(20°\right)}{12\cdot E\left(320°\right)} = \frac{1}{3}\cdot E\left(-300°\right) = \frac{1}{3}E\left(60°\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\,i$

---

5. a) $z^6 = -1 = E\left(180°\right) \Rightarrow$

$z = E\left(30°\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \vee z = E\left(90°\right) = i \vee z = E(150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

$\vee$

$z = E\left(210°\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \vee z = E\left(270°\right) = -i \vee z = E(330°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$

b) $z^4 = -8+8\sqrt{3}i = 16\cdot E\left(120°\right)$

$z = 2\cdot E\left(30°\right) = \sqrt{3}+i \vee z = 2\cdot E\left(120°\right) = -1+\sqrt{3}i$

$\vee$

$z = 2\cdot E\left(210°\right) = -\sqrt{3}-i \vee z = 2\cdot E\left(300°\right) = 1-\sqrt{3}i$

c) $z^6 = -i = 1\cdot E\left(270°\right)$

$z = E\left(45°\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i \vee z = E\left(105°\right) \vee z = E\left(165°\right)$

$\vee z = E\left(225°\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i \vee z = E\left(285°\right) \vee z = E\left(345\right)$

Beachte : Es ist $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ und $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Damit lassen sich $\cos 105°$, $\sin 105°$ etc. exakt angeben.

---

6. Es ist $\left[E\left(\alpha\right)\right]^3 = E\left(3\alpha\right) = \cos 3\alpha + i\cdot\sin 3\alpha$

Andererseits ist

$\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\cdot\sin^3\alpha$

Also $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$

Ferner ist $\sin\alpha = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \left|\cos\alpha\right| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8$

Damit ergibt sich

$\sin 3\alpha = 3\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}6 - 0{,}6^3 = 0{,}936$

---

7. $(z+i)^4 = -1$

Substitution : $u = z+i$

$u^4 = -1 \quad \Rightarrow \quad u = E(45°) \vee u = E(135°) \vee u = E(225°) \vee u = E(315°)$

und damit

$z = E(45°) - i \vee z = E(135°) - i \vee z = E(225°) - i \vee z = E(315°) - i$
