

3. a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ ist zur Geraden $x = 1$ achsensymmetrisch.

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^4 - 4 \cdot (1+h)^3 + 4 \cdot (1+h)^2 = (1+h)^2 \cdot \left[(1+h)^2 - 4(1+h) + 4 \right] = \\ &= (1+h)^2 \cdot \left[1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 4 \right] = (1+h)^2 \cdot \left[h^2 - 2h + 1 \right] = \\ &= (1+h)^2 \cdot (1-h)^2 = (1-h^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1-h) &= (1-h)^4 - 4 \cdot (1-h)^3 + 4 \cdot (1-h)^2 = (1-h)^2 \cdot \left[(1-h)^2 - 4(1-h) + 4 \right] = \\ &= (1-h)^2 \cdot \left[1 - 2h + h^2 - 4 + 4h + 4 \right] = (1-h)^2 \cdot \left[h^2 + 2h + 1 \right] = \\ &= (1-h)^2 \cdot (1+h)^2 = (1-h^2)^2 \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_A$, wenn gilt

$$\boxed{f(x_A + h) = f(x_A - h)}$$