Produktregel und Quotientenregel

==

1. Bestimme f '(x) und vereinfache

a) $f(x) = (x+1)\cdot(x-2)$ b) $f(x) = (2x-1)\cdot\frac{x}{2}$ c) $f(x) = (x^2+1)\cdot(1-2x)$

d) $f(x) = (2x^3-x)\cdot(2x^2+1)$ f) $f(x) = (\frac{1}{x}+1)\cdot(1-3x)$ g) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(2x-1)\cdot(2-x)$

h) $f(x) = (x^2+4x+4)\cdot(x^2+4x+4)$

----

2. Bestimme f '(x) und vereinfache.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{4x+1}{x}$

d) $f(x) = \frac{x}{4x+1}$ e) $f(x) = \frac{x^3-2}{2x^2}$ f) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-3}$

g) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^3}$ h) $f(x) = \frac{3x^3+1}{3x^3-1}$ i) $f(x) = \frac{2}{2x^2+1}$

j) $f(x) = \frac{-1}{2x-1}$ k) $f(x) = x+1-\frac{1}{x^2+1}$ l) $f(x) = x^4\cdot\frac{1}{x^2+1}$

----

3. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{1}{4}x^2\cdot(x-3)$

a) Zeigen Sie dass der Graph von f zwei Stellen mit waagrechten Tangenten besitzt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P\left(-1 \mid y_P\right)$.

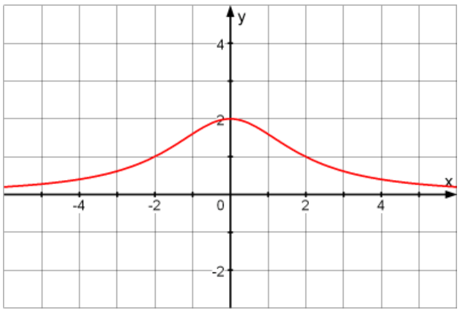
Diese Tangente t schneidet den Graphen in einem weiteren Punkt. Ermittle seine Koordinaten.

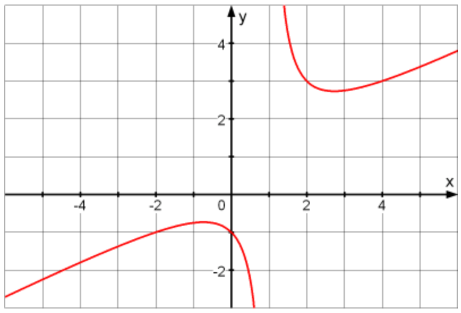
----

4. Ermittle die Gleichung der Tangente und der Normale in den angegebenen Punkten des Graphen der Funktion f. Zeichne anschließend die Tangente ein.

a) $f : x \to y = f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ und $P\left(2 \mid y_p\right)$

b) $f : x \to y = f(x) = \frac{0{,}5x^2+1}{x-1}$ und $P\left(-2 \mid y_p\right)$ und $Q\left(2 \mid y_Q\right)$





---

5. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge D.

a) Bestimme die Definitionsmenge von x und das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f.

b) Bestimme die Ableitung f ' von f. Welche Ableitungsregeln werden benötigt ?

c) Zeige, dass alle Tangenten an den Graphen von f positive Steigung haben.

d) Zeige, dass die Tangenten an den Graphen von f in den Schnittpunkten mit der x-Achse parallel zueinander sind und gib ihre Gleichung an.

e) Zeichne den Graphen von f für $-5 \le x \le 5$

---

6. Bestimme

a) $f_a(x) = \frac{x + a}{x + 1}$

b) $f_a(x) = \frac{ax}{x + 1}$

c) $f_a(x) = \frac{ax}{ax + 1}$

d) $f_a(x) = \frac{ax}{x + a}$

e) $f_a(x) = \frac{a}{x + a}$

f) $f_a(x) = \frac{x}{a + 1}$

---

7. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \to y = f_a(x) = \frac{x - a}{x + 2}$

Bestimmen Sie a so, dass die Tangente an den Graphen von f_a in dessen Schnittpunkt mit der x-Achse mit dieser einen Winkel von 45° einschließt.

---

8. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \to y = f_a(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x + a}$

Bestimmen Sie a so, dass der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Lösungen

==

1. a) $f'(x) = 1\cdot(x-2)+(x+1)\cdot 1 = 2x-1$

b) $f'(x) = 2\cdot\frac{x}{2} + (2x-1)\cdot\frac{1}{2} = 2x-\frac{1}{2}$

c) $f'(x) = 2x\cdot(1-2x)+(x^2+1)\cdot(-2) = 2x-6x^2-2$

d) $f(x) = (6x^2-1)\cdot(2x^2+1)+ (2x^3-x)\cdot 4x = 20x^4-1$

f) $f'(x) = (-\frac{1}{x^2})\cdot(1-3x) + (\frac{1}{x}+1)\cdot(-3) = -\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{3}{x}-3 = -3-\frac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot(2-x) + (2x-1)\cdot(-1)\right] = \frac{1}{2}\cdot(5-4x)$

h) $f'(x) = (2x+4)\cdot(x^2+4x+4) + (x^2+4x+4)\cdot(2x+4) =$

$= (x^2+4x+4)\cdot\left[(2x+4)+(2x+4)\right] = (x+2)^2\cdot(4x+8) = (x+2)^2\cdot(x+2)\cdot 4 = 4(x+2)^3$

2, a) $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x^2+1) - (x^2-4x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-4x^2-4-2x^3+8x^2-2x}{(x^2-1)^2} =$

$= \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2} = 4\cdot\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{4\cdot x-(4x+1)\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

d) $f'(x) = \frac{1\cdot(4x+1) - x\cdot 4}{(4x+1)^2} = -\frac{1}{(4x+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{3x^2\cdot 2x^2 - (x^3-2)\cdot 4x}{(2x^2)^2} = \frac{6x^4-4x^4+8x}{4x^4} = \frac{2x^4+8x}{4x^4} = \frac{x^3+4}{x^3}$

Ableitung ohne Quotientenregel :

$f(x) = \frac{x^3-2}{2x^2} = (x^3-2) : 2x^2 = \frac{1}{2}x-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}x-x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}+2x^{-3}$

f) $f'(x) = \dfrac{6x^2\cdot(x^2-3) - 2x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{2x^4-18x^2}{(x^2-3)^2} = \dfrac{2x^2\cdot(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^3} = (2x^2-3) : x^3 = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^3} = 2x^{-1} - 3x^{-3} \quad \Rightarrow$

$f'(x) = -2x^{-2} + 9x^{-4} = \dfrac{9}{x^4} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{9-2x^2}{2x^4}$

h) $f'(x) = \dfrac{9x^2\cdot(3x^3-1) - (3x^3+1)\cdot 9x^2}{(3x^3-1)^2} = \dfrac{-18x^2}{(3x^3-1)^2} = -\dfrac{18x^2}{(3x^3-1)^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(2x^2+1) - 2\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{-8x}{(2x^2+1)^2} = -\dfrac{8x}{(2x^2+1)^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(2x-1) - (-1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$

k) $f'(x) = 1 - \dfrac{0\cdot(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 1 + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

l) $f'(x) = 4x^3\cdot\dfrac{1}{x^2+1} + x^4\cdot\dfrac{0\cdot(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^3}{x^2+1} - \dfrac{2x^5}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{4x^3\cdot(x^2+1) - 2x^5}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2}$

---

3. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}x\cdot(x-3) + \dfrac{1}{4}x^2\cdot 1 = \dfrac{1}{4}x\cdot(3x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 2$

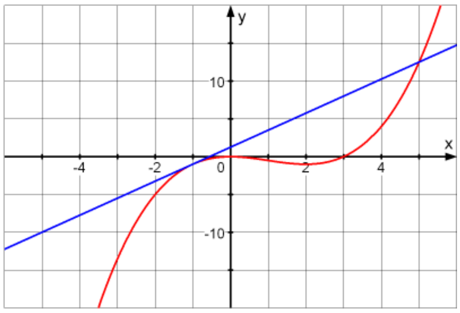
b) $f(-1) = -1$ und $f'(-1) = \dfrac{9}{4}$ und damit $y = \dfrac{9}{4}\cdot(x+1) - 1 = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Schnittpunkt :

$\dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \lor x = 5$

$S\left(5 \mid 12{,}5\right)$

Graph :



---

4. a) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(4+x^2)-8\cdot 2x}{(4+x^2)^2} = \dfrac{-16x}{(4+x^2)^2}$ $\quad f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad f(2) = 1$ und $P\left(2 \mid y_p\right)$

Tangentenformel : $y = -\dfrac{1}{2}\cdot(x-2)+1 = -\dfrac{1}{2}x+2$

b) $f'(x) = \dfrac{x\cdot(x-1) - (0{,}5x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{0{,}5x^2-x-1}{(x-1)^2}$

$f'(-2) = \dfrac{1}{3}$ $\quad f(-2) = -1$ $\quad t: y = \dfrac{1}{3}\cdot(x+2)-1 = \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

$f'(2) = -1$ $\quad f(2) = 3$ $\quad t: y = -1\cdot(x-2)+3 = -x+5$

---

5. a) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x-1} = \infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$

Asymptoten : $x = 1$ $\quad y = \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-2)\cdot(x-1) - (x^2-2x)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

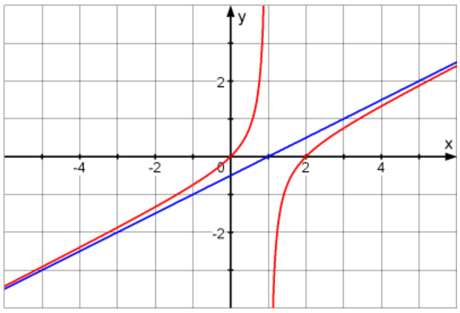
Faktorregel, Summenregel und Quotientenregel.

c) Es ist $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-2x+1+1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2} > 0$

d) Nullstellen von f sind $x = 0$ und $x = 2$.

Es ist aber $f'(0) = 1$ und $f'(2) = 1$

c) Graph



----

6. a) $f_a'(x) = \frac{1\cdot(x+1)-(x+a)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1-a}{(x+1)^2}$

b) $f_a'(x) = \frac{a\cdot(x+1) - ax\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2}$

c) $f_a'(x) = \frac{a\cdot(ax+1) - ax\cdot a}{(ax+1)^2} = \frac{a}{(ax+1)^2}$

d) $f_a'(x) = \frac{a\cdot(x+a) - ax\cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{a^2}{(x+a)^2}$

e) $f_a'(x) = \frac{0\cdot(x+a) - a\cdot 1}{(x+a)^2} = -\frac{a}{(x+a)^2}$

f) $f_a(x) = \frac{x}{a+1} = \frac{1}{a+1}\cdot x \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = \frac{1}{a+1}$

----

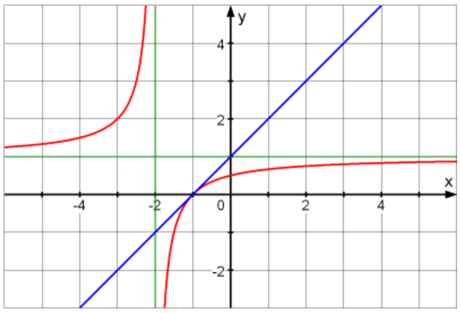
7. Ableitung : $f_a'(x) = \frac{1\cdot(x+2)-(x-a)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{a+2}{(x+2)^2}$

Schnittpunkt mit der x-Achse : $f_a(x) = \frac{x-a}{a+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$ falls $a \neq -2$ ist.

Bedingung : $f\,'_a(a) = \frac{a+2}{(a+2)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

Es ist $f_{-1}(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Das Diagramm zeigt den Graphen von f_{-1} und die Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse.



---

8. Ableitung : $f_a'(x) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \cdot (x+a) \;-\; x^2}{(x+a)^2} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2ax}{(x+a)^2}$

Bedingung : $\frac{1}{2} \cdot \frac{4+4a}{(2+a)^2} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad a \;=\; -1$

Der Graph von f_{-1} mit der waagrechten Tangente im $\left(2 \,|\, 4\right)$.