Übungen

==

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$

   Bestimme die Gleichung der Tangente um Punkt $P\left(2 \mid y_P\right)$.

---

2. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{2x}{x-1}$ mit der Definitionsmenge D.

   Bestimme $f'(-3)$ und $f'(x_0)$ mit $x_0 \in D$.

---

3. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{x+1}{x}$ mit der Definitionsmenge D.

   a) Bestimme $f'(2)$ $P\left(2 \mid y_P\right)$.

   b) Bestimme $f'(x)$ für $x_0 \in D$.

---

4. Wo hat der Graph der Funktion $f : x \to x^2 - 3x$ waagrechte Tangenten ?

---

5. Gegeben ist die Funktion $f : x \to x^2 + x - 2$.

   Bestimmen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f in den Achsenschnitt-punkten.

---

6. Gegeben ist die Funktion $f : x^3 - 4x^2 + 3x$

   Wie lauten die Funktionsgleichungen der Tangenten an den Graphen von f in den Schnitt-punkten mit der x-Achse ?

---

7. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{x^2}{2x+3}$.

   Bestimme das Verhalten von f an der Definitionslücke und die Gleichungen aller Asymp-toten des Graphen.

---

8. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{8-2x^2}{x^2-2x}$

   Bestimme das Verhalten von f an der Definitionslücke und die Gleichungen aller Asymp-toten des Graphen.

Lösungen

==

1. Gegeben : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$

Differenzenquotient : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2) - (\frac{1}{2}\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2)}{x-2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 4}{x-2}$

Differentialquotient :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (\frac{1}{2}x^2 - x - 2) = -2$$

Polynomdivision : $(\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 4) : (x-2) =$

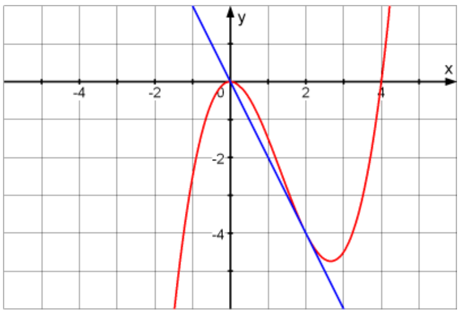
Ansatz für die Tangente : $y = -2\cdot x + t$

Es ist $f(2) = -4$

Also $-4 = -2\cdot 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

Gleichung der Tangente : $y = -2x$

Graphische Veranschaulichung :



---

2. Gegeben : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

Differenzenquotient : $\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{\frac{2x}{x+1} - 3}{x+3} = \frac{2x - 3\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot(x+1)} = \frac{-x-3}{(x+3)\cdot(x+1)}$

Differentialquotient : $\lim_{x \to -3} \frac{-x-3}{(x+3)\cdot(x+1)} = \lim_{x \to -3} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{4}$

Ableitung an der Stelle x_0 :

Differenzenquotient :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{2x}{x+1}-\frac{2x_0}{x_0+1}}{x-x_0} = \frac{2x\cdot(x_0+1)-2x_0\cdot(x+1)}{(x-x_0)\cdot(x+1)\cdot(x_0+1)} = \frac{2x-2x_0}{(x-x_0)\cdot(x+1)\cdot(x_0+1)}$$

Differentialquotient :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{2x-2x_0}{(x-x_0)\cdot(x+1)\cdot(x_0+1)} = \lim_{x\to x_0}\frac{2}{(x+1)\cdot(x_0+1)} = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

---

3. Gegeben : $f(x) = \frac{x+1}{x}$

a) Differenzenquotient : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\frac{x+1}{x}-\frac{3}{2}}{x-2} = \frac{2\cdot(x+1)-3x}{(x-2)\cdot 2x} = \frac{2-x}{(x-2)\cdot 2x}$

Differentialquotient : $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$

b) Differenzenquotient :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{x+1}{x}-\frac{x_0+1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{(x+1)\cdot x_0-(x_0+1)\cdot x}{(x-x_0)\cdot x_0\cdot x} = \frac{x_0-x}{(x-x_0)\cdot x_0\cdot x}$$

Differentialquotient :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{(x-x_0)\cdot x_0\cdot x} = \lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x_0\cdot x} = -\frac{1}{x_0^2}$$

---

4. Gegeben : $f(x) = x^2-3x$

Differenzenquotient :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{(x^2-3x)-(x_2{}^2-3x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0{}^2-3x+3x_0}{x-x_0}$$

Differentialquotient :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0{}^2-3x+3x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x+x_0)(x-x_0)-3\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\Big[(x+x_0)-3\Big] = 2x_0-3$$

Bedingung für waagrechte Tangenten : $2x_0 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$

Der Graph besitzt im Punkt $P\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)$ eine waagrechte Tangente.

---

5. Gegeben : $f(x) = x^2 + x - 2$

Nullstellen : $x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 1$

Schnittpunkte mit der x-Achse : $\left(-2 \mid 0\right)$ und $\left(1 \mid 0\right)$

$f(0) = -2$

Schnittpunkt mit der y-Achse : $\left(0 \mid -2\right)$

Differenzenquotient : $\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{x^2 + x - 2 - 0}{x + 2} = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

Differentialquotient : $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x - 1) = -3$

Tangente in $\left(-2 \mid 0\right)$: $y = -3x - 6$

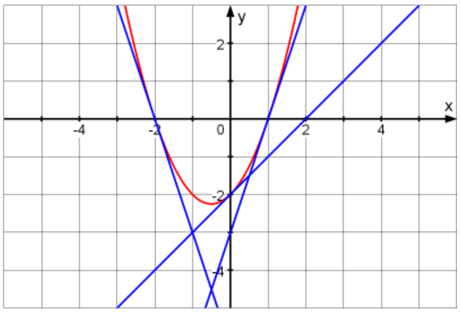
Analog ergibt sich Tangente in $\left(1 \mid 0\right)$ zu $y = 3x - 2$

Differenzenquotient : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x - 2 + 2}{x} = \frac{x^2 + x}{x}$

Differentialquotient : $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1) = 1$

Tangente in $\left(0 \mid -2\right)$: $y = x - 2$

Graphische Darstellung :



6. Gegeben : $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$

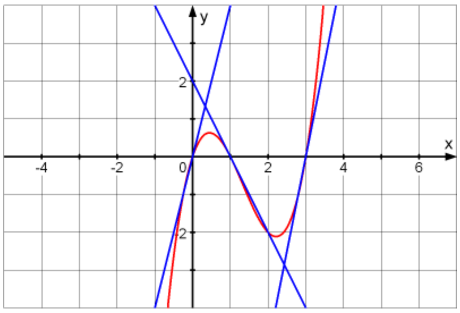
Schnittpunkte mit der x-Achse sind $\left(0 \mid 0\right)$, $\left(1 \mid 0\right)$ und $\left(3 \mid 0\right)$.

Mit dem üblichen Verfahren ergeben sich die Tangentengleichungen :

$y = 4x$, $y = -2x + 2$ und $y = 5x - 15$

Graphische Darstellung :

v



7. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}+0} \dfrac{x^2}{2x+3} = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}-0} \dfrac{x^2}{2x+3} = -\infty$

Senkrechte Asymptote : $x = -\dfrac{3}{2}$

Polynomdivision : $x^2 : (2x+3) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} + \dfrac{\frac{9}{4}}{2x+3}$

Schiefe Asymptote : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

8. $\dfrac{8-2x^2}{x^2-2x} = \dfrac{-2\cdot(x+2)(x-2)}{x\cdot(x-2)} = \dfrac{-2x-4}{x}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{8-2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x-4}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2-\frac{4}{x}}{1} = -2$$

Waagrechte Asymptote : $y = -2$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{8-2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{-2x-4}{x} = -\infty \text{ und damit } \lim_{x \to 0-0} \frac{8-2x^2}{x^2-2x} = \infty$$

Senkechte Asymptote : $x = 0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{8-2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x-4}{x} = -4$$