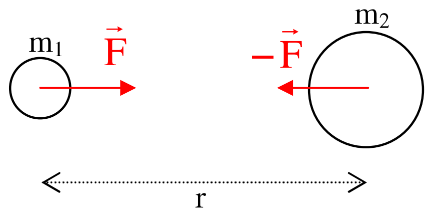
Physik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Gravitationsgesetz

Gravitationsgesetz:
Zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit der Gravitationskraft F_{grav} an.

$$F_{grav} = G^* \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit} \quad G^* = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$



Hierbei ist G^* eine wichtige Naturkonstante, die so genannte die **Gravitationskonstante**.

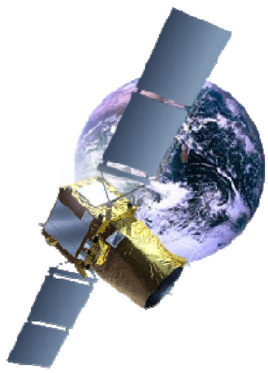
Aufgaben:

1. Bestimmen Sie jeweils die Masse der Erde nur aus den angegebenen Werten.
   a) Erdradius $R_{Erde} = 6370\ km$ und Erdbeschleunigung $g = 9{,}8\ m/s^2 = 9{,}8\ N/kg$,
   b) Abstand Erde – Mond : $d = 60{,}3\ R_{Erde}$ und Umlaufdauer des Mondes $T = 27{,}1$ Tage.

2. Bestimmen Sie die Masse der Sonne nur aus den drei folgenden Angaben.
   $G^* = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ und Umlaufdauer der Erde um die Sonne $T = 365{,}26$ Tage und
   Abstand Erde – Sonne $d = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ m = 1AE$ (eine astronomische Einheit)

3. Vom Marsmond Phobos sind die folgenden Daten bekannt:
   mittlere Entfernung vom Mars ca. 9380 km, Umlaufdauer 0,32 Tage.
   Der mittlere Durchmesser des Mars beträgt 6760 km.
   Bestimmen Sie allein aus diesen Angaben die Gewichtskraft eines „grünen Männchens“ der Masse 10 kg auf der Marsoberfläche.

4. Der Marsmond Deimos umkreist den Mars ($m_{Mars} = 6{,}40 \cdot 10^{23}\ kg$) auf einer Kreisbahn mit dem Radius $23{,}5 \cdot 10^3\ km$.
   a) Mit welcher Geschwindigkeit umrundet Deimos den Mars?
   b) Wie lange braucht Deimos für einen Marsumlauf?



5. Ein Fernseh- oder Wettersatellit muss sich immer über derselben Stelle über der Erdoberfläche befinden. Man nennt solche Satelliten auch geostationär. In welcher Höhe über der Erdoberfläche muss sich ein solcher Satellit befinden?
   ($R_{Erde} = 6370\ km$; $M_{Erde} = 5{,}977 \cdot 10^{24}\ kg$)

6. Die Fallbeschleunigung beträgt auf der Erdoberfläche $9{,}8\ m/s^2$.
   a) Wie groß ist die Fallbeschleunigung in einer Höhe von 500 km über der Erdoberfläche?
   b) In welcher Höhe über der Erdoberfläche beträgt die Erdbeschleunigung nur noch $5{,}0\ m/s^2$?

Physik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Gravitationsgesetz * Lösungen

1. a) Für die Gewichtskraft einer Masse m auf der Erdoberfläche gilt

$$m \cdot g = F_G = F_{grav} = G^* \cdot \frac{m \cdot M_{Erde}}{{R_{Erde}}^2} \;\Rightarrow\; M_{Erde} = \frac{g \cdot {R_{Erde}}^2}{G^*} = \frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}} = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,kg$$

b) $F_{Zentripetal} = F_{grav} \;\Leftrightarrow\; m_{Mond} \cdot \omega^2 \cdot r = G^* \cdot \frac{m_{Mond} \cdot M_{Erde}}{r^2} \;\Leftrightarrow$

$$M_{Erde} = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot (60{,}3 \cdot R_E)^3}{T^2 \cdot G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot (60{,}3 \cdot 6{,}370 \cdot 10^6\,m)^3}{(27{,}1 \cdot 24 \cdot 3600s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}} = 6{,}03 \cdot 10^{24}\,kg$$

2. $F_{Zentripetal} = F_{grav} \;\Leftrightarrow\; m_{Erde} \cdot \omega^2 \cdot d = G^* \cdot \frac{m_{Erde} \cdot M_{Sonne}}{d^2} \;\Leftrightarrow$

$$M_{Sonne} = \frac{\omega^2 \cdot d^3}{G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{T^2 \cdot G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11}\,m)^3}{(365{,}26 \cdot 24 \cdot 3600s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,kg$$

3. Bestimme zunächst die Masse des Mars

$F_{Zentripetal} = F_{grav} \;\Leftrightarrow\; m_{Phobos} \cdot \omega^2 \cdot d = G^* \cdot \frac{m_{Phobos} \cdot M_{Mars}}{d^2} \;\Leftrightarrow$

$$M_{Mars} = \frac{\omega^2 \cdot d^3}{G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{T^2 \cdot G^*} = \frac{4\pi^2 \cdot (9{,}3 \cdot 10^6\,m)^3}{(0{,}32 \cdot 24 \cdot 3600s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}} = 6{,}23 \cdot 10^{23}\,kg$$

$$F_{G,grünes\,Männchen} = m \cdot g_{Mars} = G^* \cdot \frac{m \cdot M_{Mars}}{{R_{Mars}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{10kg \cdot 6{,}23 \cdot 10^{23}\,kg}{(6{,}76 \cdot 10^6\,m : 2)^2} = 36\,N$$

4. a) $\frac{m_{Deimos} \cdot v^2}{r} = G^* \cdot \frac{m_{Deimos} \cdot M_{Mars}}{r^2} \;\Leftrightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{G^* \cdot M_{Mars}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot 6{,}40 \cdot 10^{23}\,kg}{23{,}5 \cdot 10^6\,m}} = 1{,}35 \cdot \frac{km}{s}$$

b) $v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 23{,}5 \cdot 10^3\,km}{1{,}35\,km\,s^{-1}} = 30{,}4\,h$

5. Die Umlaufdauer des Satelliten muss genau 24,0 Stunden betragen.

$$F_{Zentripetal} = F_{grav} \;\Leftrightarrow\; m_{Sat} \cdot \omega^2 \cdot r = G^* \cdot \frac{m_{Sat} \cdot M_{Erde}}{r^2} \;\Leftrightarrow\; r^3 = G^* \cdot \frac{M_{Erde}}{\omega^2} = \frac{G^* \cdot M_{Erde} \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G^* \cdot M_{Erde} \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg \cdot (24 \cdot 3600s)^2}{4\pi^2}} = 42{,}24 \cdot 10^6\,m$$

$$h = r - R_{Erde} = 42{,}24 \cdot 10^6\,m - 6{,}37 \cdot 10^6\,m = 36 \cdot 10^6\,km$$

6. a) $m \cdot g(r) = G^* \cdot \frac{m \cdot M_{Erde}}{r^2} \;\Rightarrow\; g(r) = \frac{G^* \cdot M_{Erde}}{r^2} \sim \frac{1}{r^2}$ also

$$g(500km\,über\,der\,Erde) = 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{R_{Erde}}{r} = 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{6370km}{(6370+500)km} = 9{,}1\,\frac{m}{s^2}$$

b) $g(r) \sim \frac{1}{r^2}$ also $\frac{g(R_{Erde}+h)}{g(R_{Erde})} = \frac{{R_{Erde}}^2}{(R_{Erde}+h)^2}$ also $\frac{5{,}0\,m/s^2}{9{,}8\,m/s^2} = \frac{{R_{Erde}}^2}{(R_{Erde}+h)^2} \;\Rightarrow$

$$R_{Erde} + h = R_{Erde} \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{5{,}0}} \;\Rightarrow\; h = R_{Erde} \cdot \left(\sqrt{\frac{9{,}8}{5{,}0}} - 1\right) = 2{,}55 \cdot 10^3\,km$$