Kreisbewegung

==

Damit sich ein Körper der Masse m auf einer Kreisbahn vom Radius r, dannmuss die Summe aller an diesem Körper angreifenden Kräfte eine zum Mittelpunk der Kreisbahn gerichtete Kraft vom Betrag

$$\boxed{F_r = m \cdot \frac{v^2}{r}}$$

sein.

F_r heißt ***Zentripetalkraft***.

Bewegt sich der Körper mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$,

dabei ist T die ***Umlaufsdauer*** und $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ die ***Frequenz***,

dann gilt $\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot r}$ und damit $\boxed{F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r}$

Aufgaben

---

1. Der Rotor eines Hubschraubers hat den Radius $r = 7{,}0$ m. Er rotiert mit der Frequenz $f = 1{,}0$ Hz.

   a) Welchen Weg legt die Rotorspitze in einer Minute zurück ?

   b) Welche Umlaufgeschwindigkeit besitzt die Rotorspitze?

---

2. Ein PKW (1,2 t) durchfährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $\frac{km}{h}$ auf waagrechter Strecke eine Kurve mit dem Radius 60 m.

   a) Wie groß ist die dafür benötigte Zentripetalkraft ? Geben Sie diese Kraft auch in Vielfachen der Gewichtskraft G an.

   b) Von wem wird diese Zentripetalkraft auf den PKW ausgeübt ?

   c) Um welchen Winkel müsste man die Fahrbahn überhöhen, damit ein gefahrloses Durchfahren der Kurve möglich ist ? Erkläre die Rechnung mit einer Zeichnung!

---

3. Der Wagen einer Achterbahn mit 200 kg Masse wird auf eine Höhe von 50 m gezogen und fährt von dort aus in die Tiefe,um anschließend einen kreisförmigen Loopding von 15 m Radius zu durchfahren.

   a) Welche Geschwindigkeit hat der Wagen am Beginn des Loopings.

   b) Berechnen Sie die Kraft, die die Schienen in diesem Punkt auf den Wagen ausüben müssen! Wie kommt es zu dieser Kraft?

   c) Welche Geschwindigkeit hat der Wagen im höchsten Punkt der Kraft ?

   Welche Kraft müssen die Schienen in diesem Punkt auf den Wagen ausüben ?

Lösungen:

1. Gegeben: $r = 7{,}0\text{ m}$ und $f = 1\text{ Hz}$

   a) Gesucht: Weg s für $t = 1\text{ min} = 60\text{ s}$

   $$s = v\cdot t = \frac{2\pi}{T}\cdot r\cdot t \quad s = \frac{2\pi}{1\text{ s}}\cdot 7\text{ m}\cdot 60\text{ s} = 2{,}6\text{ km}$$

   b) Gesucht : $v = \omega\cdot r = \frac{2\pi}{T}\cdot r \quad v = \frac{2\pi}{1\text{ s}}\cdot 7\text{ m} = 44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   Beachte : Bei einer Frequenz von 1 Hz also einer Umdrehung pro Sekunde ist die Umlaufsdauer T natürlich auch eine Sekunde.

---

2. Gegeben: $v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $r = 60\text{ m}$ sowie $m = 1{,}2\text{ t} = 1200\text{ kg}$

   a) Gesucht: F_r

   $$F_r = m\cdot\frac{v^2}{r} \quad F_r = 1200\text{ kg}\cdot\frac{\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{60\text{ m}} = 8\text{ kN} = 0{,}68\cdot G$$

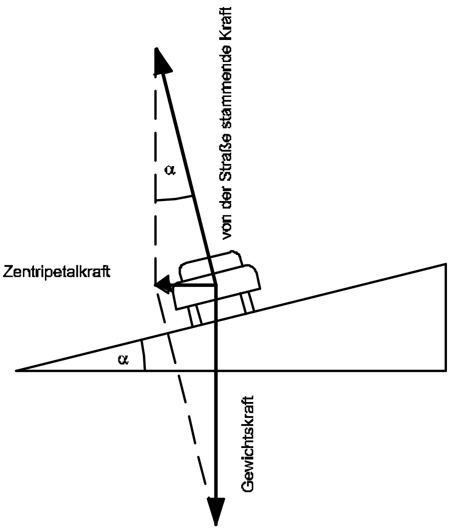
   G ist dabei die Gewichtskraft $G = m\cdot g = 1200\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11{,}7\text{ kN}$

   b) Die Zentripetalkraft wird von Straße über die Reibung auf das Auto ausgeübt.

   Wie sagt der Fachmann : ***Nix Reibung, dann auch nix Kurve!***

   c) Gesucht. Winkel für die Straßenüberhöheung

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\cdot\frac{v^2}{r}}{m\cdot g} = \frac{v^2}{g\cdot r}$$



$$\tan\alpha = \frac{\left(20\ \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}\cdot 60\ m} = 0{,}68 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 34{,}2°$$

---

3. Gegeben: $m = 200\ kg$ und $h = 50\ m$

a) Gesucht: v

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot h \quad\Leftrightarrow\quad v = \sqrt{2g\cdot h} \quad v = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\cdot 50\ m} = 31{,}3\ \frac{m}{s}$$

b) Gesucht: Kraft F_S der Schienen

Die Zentripetalkraft ist im tiefsten Punkt des Looping die Differenz aus der von den Schienen stammenden Kraft F_S und der Gewichtskraft G des Wagens.

$$F_r = F_S - G \quad\Leftrightarrow\quad F_S = F_r + G = m\cdot\frac{v^2}{r} + m\cdot g = m\cdot\left(\frac{v^2}{r} + g\right)$$

$$F_S = 200\ kg\cdot\left[\frac{\left(31{,}3\ \frac{m}{s}\right)^2}{15\ m} + 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right] = 15\ kN$$

c) Gesucht : v und F_S im höchsten Punkt des Loopings

$$v = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\cdot 20\ m} = 19{,}8\ \frac{m}{s}$$

Beachte: Der Wagen befindet sich nur 20 m unter seiner Ausgangslage.

Die Zentripetalkraft ist im höchsten Punkt des Looping die Summe aus der von den Schienen stammenden Kraft F_S und der Gewichtskraft G des Wagens.

$$F_r = F_S + G \quad \Leftrightarrow \quad F_S = F_r - G = m \cdot \frac{v^2}{r} - m \cdot g = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$$

$$F_S = 200\ \text{kg} \cdot \left[\frac{\left(19{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{15\ \text{m}} - 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 3{,}3\ \text{kN}$$

Harmonische Schwingungen
===

Eine periodische Bewegung eines Körpers der Masse m um eine Gleichgewichtslage nennt man ***Schwingung***. Wird der Körper aus der Ruhelage ausgelenkt, dann wirkt eine ***rückstellende Kraft***, die den Körper zur Gleichgwichtslage hin beschleunigt.

Infolge seiner Trägheit schwingt der Körper über die Gleichgewichslage hinaus und es stellt sich wieder eine rückstellende Kraft ein, die den Körper abbbremst und schließlich wieder zur Ruhelage hin beschleunigt.

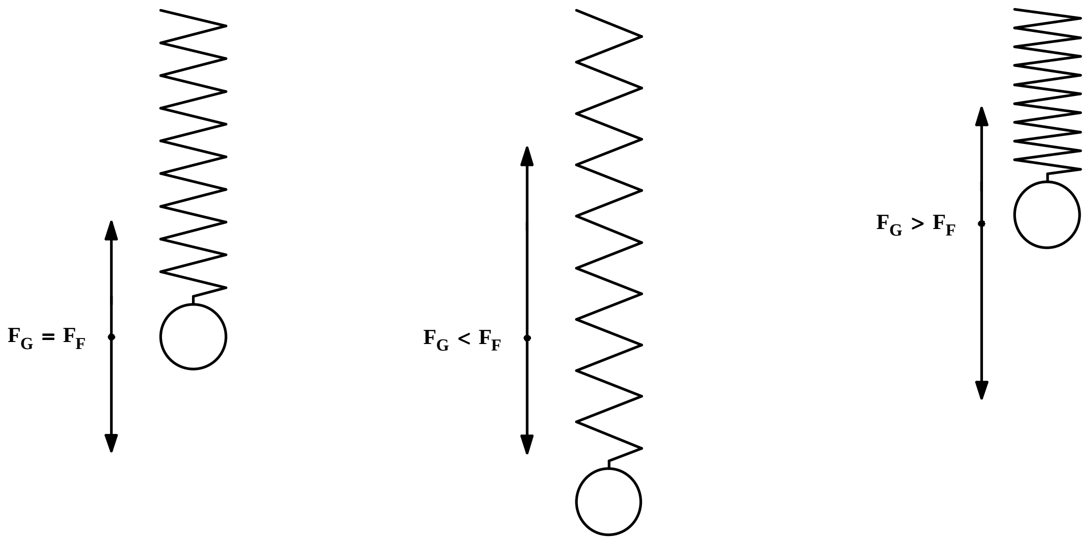
Wirkt keine Reibung, dann läuft dieser Prozess ständig weiter.

Die gerichtete Entfernung des Körpers zur Zeit t nennt man ***Elongation y(t)***.

Die maximale Elongation heißt ***Amplitude A*** der Schwingung.

Die Zeit für eine Hin- und Herbewegung nennt man S***chwingungsdauer T***.

Beispiel:

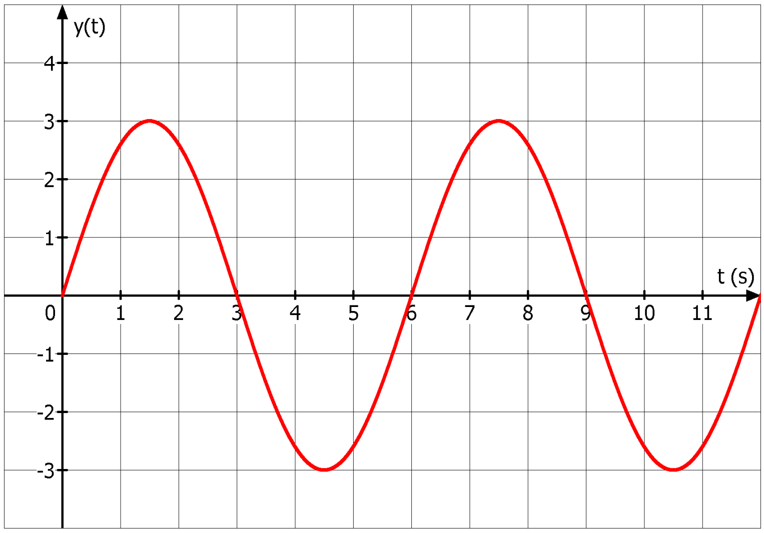


Schwingung am Federpendel

Gilt für die Elongation die Darstellung

$\boxed{y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)}$ mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

dann spricht man von einer ***harmonischen Schwingung***.



Zeit-Elongations-Diagramm einer harmonischen Schwingung

Für die Geschwingkeit v(t) bzw. die Beschleunigung a(t) des schwingenden Körpers zur Zeit t gilt dann

$$\boxed{v(t) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)} \text{ und } \boxed{a(t) = -A\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)}$$

mit der betragsmäßig maximalen Geschwindigkeit

$$\boxed{v_{max} = A\cdot\omega}$$

beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und der betragsmäßig maximalen Beschleunigung

$$\boxed{a_{max} = A\cdot\omega^2}$$

in den Umkehrpunkten.

Beispiel:

Die Schwingung an einem Federpendel ist harmonisch. Ist D die Härte der Feder, dann gilt

$$\boxed{T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

Allgemein gilt:

Eine Schwingung um eine Gleichgewichtslage ist genau dann harmonisch, wenn die rückstellende Kraft proportional zur Elongation und ihr entgegengerichtet ist.

$$\boxed{F_{Rück} = -D \cdot y}$$

mit einer Konstanten D. D heißt ***Richtgröße*** der Schwingung.

Beispiel:

Ein Fadenpendel der Länge L schwingt annähernd harmonisch mit

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Aufgaben

---

1. Eine Schaukel auf dem Jahrmarkt benötigt für 5 volle Schwingungen 16 Sekunden.

   Wie groß sind Schwingungsdauer und Frequenz ?

---

2. Ein Körper der Masse 0,1 kg hängt an einer Schraubenfeder. Er wird aus der Ruhelage um 5 cm ausgelenkt und von dort losgelassen. Er schwingt dann mit der Schwingungsdauer von 0,6 s.

   a) Wie groß ist die Federkonstante D ?

   b) Um wie viel ist die Feder in der Gleichgewichtslage verlängert?

   c) Wie groß ist die Maximalgeschwindigkeit ?

   d) Wie groß ist Maximalbeschleunigung?

   e) Wie weit muss man den Körper zu Beginn auslenken, damit die maximale Beschleunigung gerade 5,0 $\frac{m}{s^2}$ beträgt**.**

---

3. Eine mechanische Standuhr hat ein sog. Sekundenpendel, das einmal pro Sekunde die Gleichgewichtslage durchläuft. Welche Periodendauer hat ein Sekundenpendel ?

   Berechne die Länge eines Sekundenpendels.

Lösungen:

1. Gegeben: $n = 5$ und $t = 16$ s

   Gesucht: Schwingungsdauer T und Frquenz f

   $T = \frac{t}{n} \quad T = \frac{16\text{ s}}{5} = 3{,}2\text{ s}$

$f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} \quad f = \frac{1}{3{,}2\text{ s}} = 0{,}3125\text{ s}^{-1} = 0{,}3125\text{ Hz}$

---

2. Gegeben : $m = 0{,}1$ kg und $A = 5$ cm $= 0{,}05$ m sowie $T = 0{,}6$ s

a) Gesucht: D

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{D} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}1\text{ kg}}{0{,}36\text{ s}^2} = 11\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\text{Beachte : } 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}} = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Bedeutung des Ergebnisses: Man benötigt 11 N und die Feder um 1 m zu dehnen.

b) Gesucht; y_0

In der Ruhelage wird die die Feder durch die Gwichtskraft der Masse m gedehtnt.

$$\text{Hookesches Gesetz: } D = \frac{F}{y} \quad \Leftrightarrow \quad D \cdot y = F \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{F}{D}$$

$$\text{Also } y_0 = \frac{m \cdot g}{D} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{0{,}1\text{ kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{11\ \frac{\text{n}}{\text{M}}} = 0{,}089\text{ m} = 8{,}9\text{ cm}$$

c) Gesucht: v_{max}

$$v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} \quad v_{max} = 0{,}05\text{ m} \cdot \frac{2\pi}{0{,}6\text{ s}} = 0{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Gesucht: a_{max}

$$a_{max} = A \cdot \omega^2 = A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad a_{max} = 0{,}05\text{ cm} \cdot \left(\frac{2\pi}{0{,}6\text{ s}}\right)^2 = 5{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e) Gesucht: A_1 für $a_{max} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$a_{max} = A_1 \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{a_{max}}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \quad A_1 = \frac{5\ \frac{m}{s^2}}{\left(\frac{2\pi}{0{,}6\ s}\right)^2} = 0{,}046\ m = 4{,}6\ cm$$

----

3. Gesucht : Schwingungsdauer R und Länge l des Pendels

$$T = 2s$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{4\ s^2}{4\pi^2} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 0{,}99\ m$$
