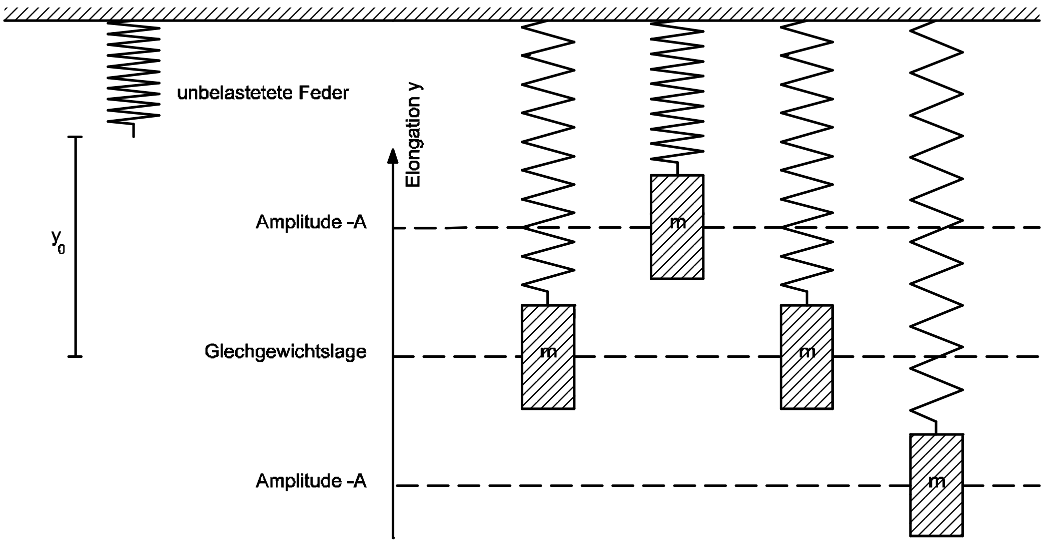
Schwingungen

===

1. Die Schwingung am Federpendel



Lenkt man einen an einer Schraubenfeder hängenden Körper der Masse m aus seiner Ruhelage aus, dann vollführt er eine periodische Bewegung um seine diese Ruhelage, eine sog. ***Schwingung***, mit der ***Schwingungsdauer T*** aus.

Diese Bewegung wird durch die elastische Kraft der Feder, die Gewichtskraft und die Trägheit des Körpers aufrecht erhalten. Die Summe der elastischen Kraft der Feder und der Gewichtskraft des Körpers wirkt stets zur Ruhelage hin und heißt deshalb ***Rückstellkraft***.

Die Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage bezeichnet als ***Elongation y***, die maximale Auslenkung als ***Amplitude A*** der Schwingung.

Die Elongation ändert sich mit der Zeit $y = y(t)$.

Ist D die Härte der Feder, dann gilt nach dem Hookeschen Gesetz $\boxed{D = \frac{F}{s}}$

Verlängerung der unbelasteten Feder bis zum Gleichgewichtspunkt:

$$D = \frac{F}{s} = \frac{m \cdot g}{y_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{m \cdot g}{D}$$

Für die Größe der Rücktreibenden Kraft $F_{Rück}$ bei der Elongation y gilt daher:

$$F_{rück} = m \cdot g - F_{elast} = -m \cdot g + D \cdot \left(y_0 - y\right) = -m \cdot g + D \cdot y_0 - D \cdot y = -D \cdot y$$

Ergebnis:

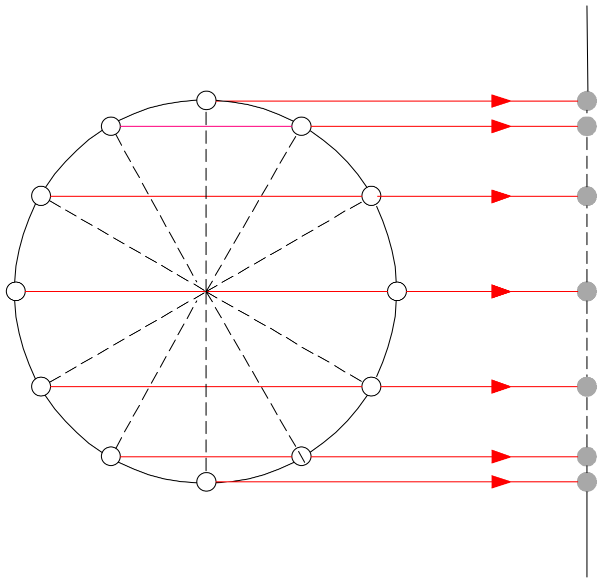
Die rückstellende Kraft am Federpendel ist zur Elongation proportional und ihr entgegen gerichtet. Die Proportionalitätskonstante ist $-D$ mit der Härte D der Feder.

$$\boxed{F = -D \cdot y}$$

---

2. Die Bewegungsgleichungen für die Bewegung am Federpendel

V



Die Schwingung eines Körpers an einem Federpendel mit der Amplitude A und der Schwingungsdauer T stimmt mit der Projektion der Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn vom Radius $r = A$ und der Umlaufzeit T überein.

Folgerung :

Bewegungsgleichungen der harmonischen Schwingung mit der Amplitude A und der Schwingungsdauer T :

Zeit - Elongations - Funktion : $$\boxed{y(t) = A \cdot \sin\varphi = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$$

Schwingungen mit einer derartigen Zeit - Weg - Funktion heißen ***harmonische Schwingungen***.

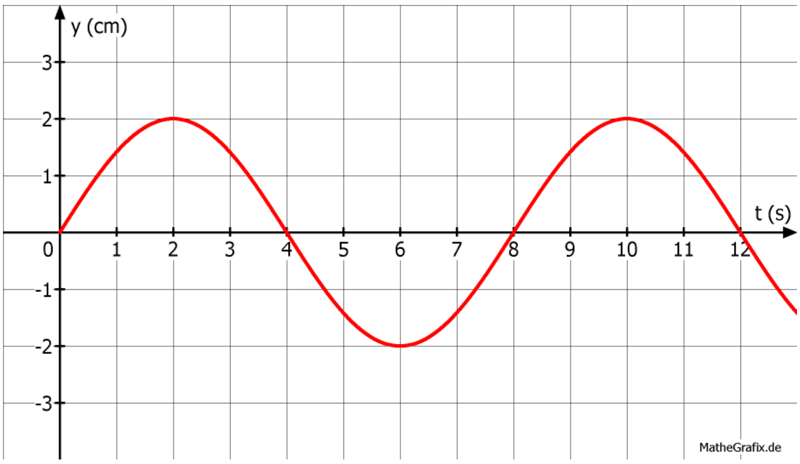
Zeit - Geschwindigkeits - Funktion : $\boxed{v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos\varphi = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$

Zeit - Beschleunigungsfunktion : $\boxed{a(t) = -A \cdot \omega^2 \sin\varphi = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$

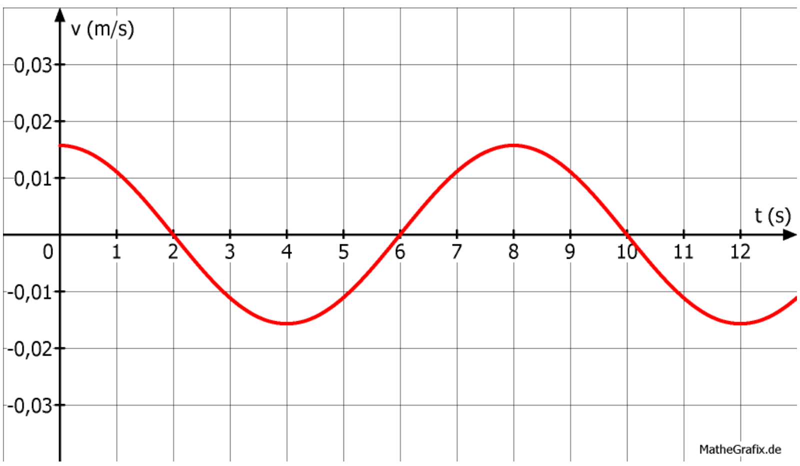
Im Zusammenhang mit einer Schwingung nennt man φ Schwingungsphase und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreis-frequenz.

Bewegungsdiagramme (Amplitude $A = 2$ cm und Schwingungsdauer $T = 8$ s) :

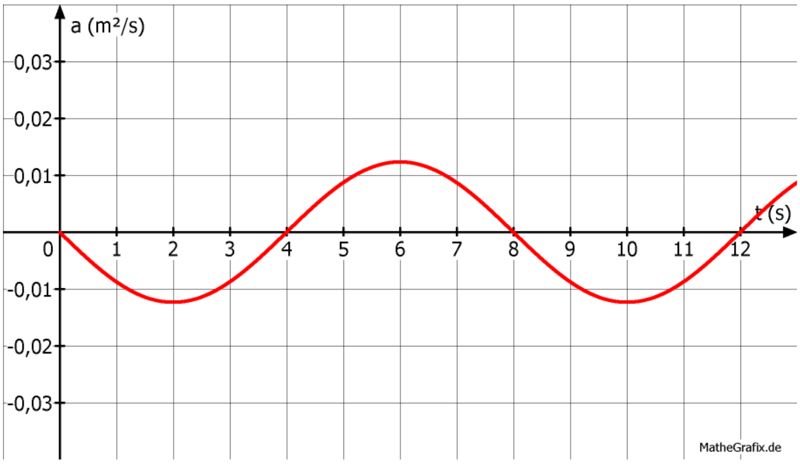
Zeit - Elongations-Diagramm



Zeit - Geschwindigkeits -Diagramm



Zeit - Beschleunigungs - Diagramm



Folgerungen:

1. Der schwingende Körper hat die maximale Geschwindigkeit beim Passieren der Gleichgewichtslage. Sie beträgt

$$\boxed{v_{max} = A \cdot \omega}$$

2. Der schwingende Körper erfährt betragsmäßig die größte Beschleunigung in den Umkehrpunkten. Sie beträgt

$$\boxed{a_{max} = A \cdot \omega^2}$$

---

3. Das Kraftgesetz für eine harmonische Schwingung

Für die rückstellende Kraft bei der Schwingung am Federpendel gilt :

$F = -D \cdot y(t) = -D \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ mit der Federhärte D

Andererseits gilt nach dem 2. Newtonschen Gesetz:

$F = m \cdot a = -m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Gleichgesetzt ergibt sich :$D = m \cdot \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

Allgemein gilt :

Ist bei einer Schwingung die Rückstellkraft F proportional zur Auslenkung y,

$$F = -D \cdot y$$

mit der Proportionalitätskonstanten D, dann vollführt der Körper eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{D}}$$

D heißt deshalb auch ***Richtgröße*** der harmonischen Schwingung.

Im Fall des Federpendels ist D gleich der Federhärte.

Umgekehrt ist bei einer harmonischen Schwingung die Rückstellkraft proportional zur Elongation und ihr entgegengerichtet.

4. Das Fadenpendel

Die Schwingung eines Körpers der Masse m an einem Fadenpendel mit der Fadenlänge l ist für kleine Amplituden in guter Näherung harmonisch mit der Richtgröße $D = \frac{m \cdot g}{l}$ d.h. für die Schwingungsdauer T gilt

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$
