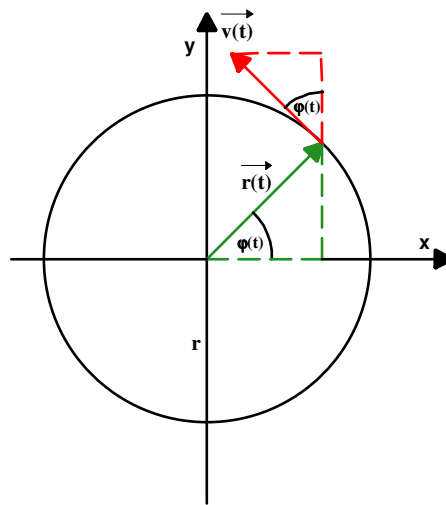


## Die Kreisbewegung

### 1. Beschreibung der Kreisbewegung



Die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn vom Radius  $r$  kann beschrieben werden durch

a) seinen Ortsvektor  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

b) durch den Winkel  $\varphi(t)$  den der Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  mit der positiven  $x$ -Achse bildet.

Der Winkel  $\varphi(t)$  wird im Bogenmaß gemessen d. h. ist  $s$  der Bogen den der Winkel aus dem Kreis ausschneidet, dann ist

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Eine Kreisbewegung heißt **gleichförmig**, wenn vom Ortsvektor in der Zeit  $\Delta t$  überstrichene Winkel  $\Delta\varphi$  proportional zu  $\Delta t$  ist. Der konstante Quotient

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

gibt dann an, welcher Winkel pro Sekunde überstrichen wird und heißt deshalb Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kreisbewegung.

Ist  $T$  die Umlaufdauer d.h die Zeit die der Körper für eine Umdrehung benötigt, dann gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Befindet sich der Körper zur Zeit  $t = 0$  auf der positiven x-Achse des Koordinatensystems d. h.,  $\varphi(0s) = 0$ , dann schließt der Ortsvektor zur Zeit  $t$  den Winkel

$$\varphi(t) = \omega \cdot t$$

Ist  $\varphi(0s) = \varphi_0$ , dann ist

$$\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$$

**Beachte :**

$$\left[ \omega \right] = \frac{1(\text{rad})}{\text{s}} = \text{s}^{-1} \text{ mit } 1 \text{ rad} = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Technisch beschreibt man gleichförmige Kreisbewegungen durch Angabe der **Frequenz f**. Sie gibt an, wie viele Umdrehungen der Körper pro Sekunde ausführt.

Es ist daher

$$f = \frac{1}{T} \text{ und } \omega = 2\pi \cdot f$$

---

**Folgerungen :**

a) Für den Ortsvektor einer gleichförmigen Kreisbewegung mit  $\varphi(0s) = 0$  gilt

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi(t) \\ r \cdot \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

b) In der Zeit  $T$  legt der Körper den Umfang  $U$  des Kreises zurück. Also gilt für die Bahngeschwindigkeit  $v$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \omega r = \text{const.}$$

d.h., die gleichförmige Kreisbewegung ist eine Bewegung bei der sich Richtung der Geschwindigkeit, nicht jedoch ihr Betrag ändert.

Für den Geschwindigkeitsvektor gilt dann

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\omega r \cdot \sin\varphi(t) \\ \omega r \cdot \cos\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega r \cdot \sin(\omega t) \\ \omega r \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

---

## 2. Die Zentripetalkraft

Damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegt, muss in jedem Punkt der Bahn eine konstante Kraft zum Kreismittelpunkt hin wirken.

Diese Kraft heißt **Zentripetalkraft**  $\vec{F}_r$  und die von ihr hervorgerufene Beschleunigung **Zentripetalbeschleunigung**  $\vec{a}_r$ .

### Ergebnis :

Bewegt sich ein Körper mit der Bahngeschwindigkeit  $v$  bzw. der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer Kreisbahn vom Radius  $r$ , dann muss er zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin beschleunigt werden. Für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung gilt

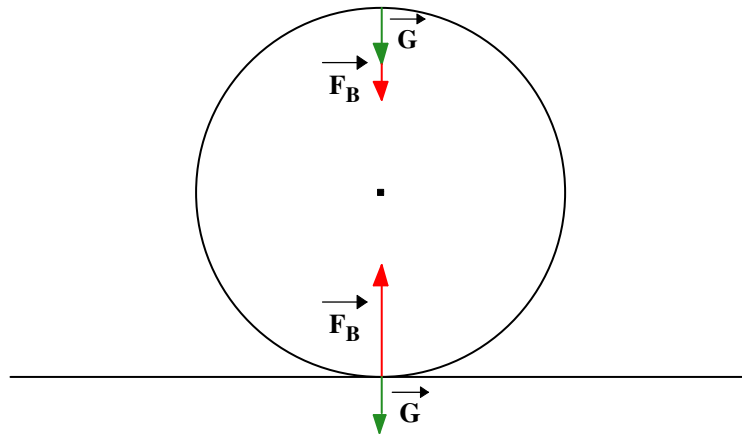
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Die diese Beschleunigung notwendige Zentripetalkraft ist ebenfalls zum Mittelpunkt hin gerichtet und hat den Betrag

$$F_r = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

## Anwendungen

### 1. Looping



Ein 300 kg schwerer Wagen fährt mit  $v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  in einen kreisförmigen Looping vom Radius  $r = 10 \text{ m}$ .

- Mit welcher Kraft drückt der Wagen im Punkt A gegen den Boden?
- Berechne die Geschwindigkeit des Wagens im höchsten Punkt A der Bahn.

b) Wie groß ist die Kraft, mit der der Wagen in A gegen die Schienen gedrückt wird?

$$\text{a) } F_A - G = F_r \Rightarrow F_A = F_r + G$$

$$F_A = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \left( g + \frac{v^2}{r} \right) \quad F_A = 300 \text{ kg} \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{625 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{10 \text{ m}} \right) = 21,7 \text{ kN}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + mg \cdot 2r \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 4g \cdot r}$$

$$v_A = \sqrt{625 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 4 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} = 15,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

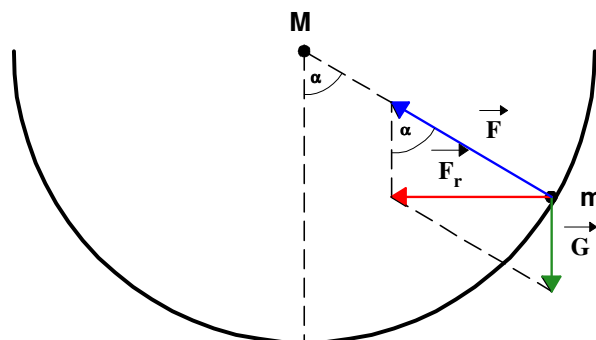
$$\text{c) } F_B + G = F_r \Rightarrow F_b = F_r - G$$

$$F_B = m \cdot \frac{v^2}{r} - m \cdot g = m \cdot \left( \frac{v^2}{r} - g \right) \quad F_b = 300 \text{ kg} \cdot \left( \frac{(15,3 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{10 \text{ m}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 4,1 \text{ kN}$$

$$\text{d) } F_B = 0 \Rightarrow m \cdot \frac{v_B^2}{r} = mg \Rightarrow v_B = \sqrt{g \cdot r} \quad v_B = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} = 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_A = \sqrt{v_B^2 + 4g \cdot r} \quad v_A = \sqrt{(9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 4 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} = 22,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

## 2. Kugel in der rotierenden Halbkreisrinne



Die auf die Kugel wirkende Gewichtskraft  $\vec{G}$  und die von der Bahn stammende Kraft  $\vec{F}$  ergeben die Zentripetalkraft.

$$\text{Es gilt dann } \tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{R \cdot \omega^2} = \frac{g}{R \cdot 4\pi^2 \cdot f^2}$$

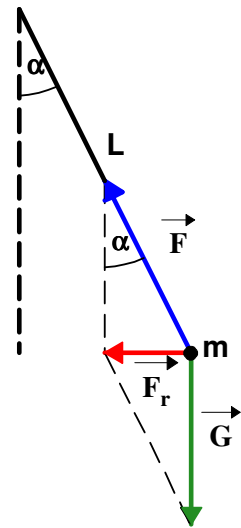
$$R = 1 \text{ m}$$

f (Hz)	1	2	3	5	10
$\alpha$	75°	86°	88°	89°	89,9°

### 3. Das konische Pendel - Kettenkarussell

Die auf die Kugel wirkende Gewichtskraft  $\vec{G}$  und die vom Faden stammende Zugkraft  $\vec{F}$  ergeben die Zentripetalkraft.

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot L \cdot \sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{L \cdot \omega^2} = \frac{g}{R \cdot 4\pi^2 \cdot f^2}$$



### 4. Rotierende Flüssigkeitsoberfläche

Für ein Teilchen im Abstand r von der Drehachse ergibt sich aus dem Kräfte-dreieck

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

Ist die Oberflächenkurve der Graph der Funktion  $f : r \rightarrow f(r)$  gegeben durch dann ist

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} = f'(r)$$

Damit gilt  $f(r) = \frac{m \cdot \omega^2}{m \cdot g} \cdot \frac{r^2}{2} + C$  d.h. die Flüssigkeitsoberfläche ist ein Paraboloid.

### 5. Kurvenfahrt eines Pkw ohne Straßenüberhöhung

Damit die Kurve sicher durchfahren werden kann muss gelten

$$F_r \leq F_R = \mu_H \cdot m \cdot g$$



#### 4. *Rotierende Flüssigkeitsoberfläche*

Für ein Teilchen im Abstand  $r$  von der Drehachse ergibt sich aus dem Kräfte-dreieck

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

Ist die Oberflächenkurve der Graph der Funktion  $f : r \rightarrow f(r)$  gegeben durch dann ist

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} = f'(r)$$

Damit gilt  $f(r) = \frac{m \cdot \omega^2}{m \cdot g} \cdot \frac{r^2}{2} + C$  d.h. die Flüssigkeitsoberfläche ist ein Paraboloid.

---