Die Keplerschen Gesetze
===

Astronomische Daten, die bei den folgenden Berechnungen verwendet werden dürfen:

Große Halbachse Sonne-Erde: 1 astronomische Einheit = 1 AE = $149{,}6 \cdot 10^6$ km

Mittlerer Erdradius: 6370 km

Erdmond: Umlaufdauer um die Erde: 27,1 Tage; mittlerer Abstand zur Erde: 384 000 km

1. Der Planet Mars benötigt für einen Umlauf um die Sonne 1,88 Jahre.

   Bestimmen Sie ungefähr die maximale und die minimale Entfernung von Erde und Mars.

---

2. Ein NAVSTAR-Satellit des GPS umkreist die Erde in einer Höhe von 20183 km.

   Bestimmen Sie die Umlaufzeit dieses Satelliten.

---

3. Ein Satellit umkreist die Erde in 220 km Höhe auf einer äquatorialen Bahn.

   a) Berechnen Sie die Umlaufsdauer um der Erde.

   b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit des Satelliten bezogen auf die Erde und vergleichen Sie diesen Wert mit der Bahngeschwindigkeit der Erde bei deren Umlauf um die Sonne.

---

4. In welcher Höhe über der Erde muss sich ein Fernsehsatellit wie z.B. Astra 1L befinden?

   Beachten Sie, dass sich der Satellit für einen Beobachter von der Erde aus immer an der gleichen Stelle befinden muss. Man spricht von einem so genannten geostationären Satellit.

---

5. Der Planet Jupiter wird von mehreren Monden umkreist. Die vier größten heißen auch Galileische Monde, nachdem sie 1610 von Galileo Galilei mit dem ersten astronomischen Fernrohr, das er selbst gebaut hatte, entdeckt wurden. Der Mond Callisto umkreist den Planeten auf einer Bahn mit einem Radius von $1{,}884 \cdot 10^6$ km mit einer Umlaufsdauer von 16,69 d.

   a) Berechnen Sie die Umlaufsdauer des Mondes Io, dessen Bahnradius $4{,}218 \cdot 10^6$ km beträgt.

   b) Berechnen Sie den Bahnradius von Europa, dessen Umlaufsdauer 3,55 d beträgt.

   c) Die Umlaufsdauer des Mondes Ganymed ist ziemlich genau doppelt so groß wie die von Europa - berechnen Sie den Faktor, um den der Bahnradius größer ist.

---

6. Ein Satellit bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Erde. Sein erdnächster Abstand beträgt 300 km, sein größter Abstand 2000 km.

   Bestimmen Sie mit Hilfe des 2.Keplerschen Gesetzes das Verhältnis der Geschwindigkeiten an diesen Stellen

---

Die Keplerschen Gesetze
==

Astronomische Daten, die bei den folgenden Berechnungen verwendet werden dürfen:

Große Halbachse Sonne-Erde: 1 astronomische Einheit $= 1$ AE $= 149{,}6 \cdot 10^6$ km

Mittlerer Erdradius: 6370 km

Erdmond: Umlaufdauer um die Erde: 27,1 Tage; mittlerer Abstand zur Erde: 384 000 km

1. Der Planet Mars benötigt für einen Umlauf um die Sonne 1,88 Jahre.

   Bestimmen Sie ungefähr die maximale und die minimale Entfernung von Erde und Mars.

---

2. Ein NAVSTAR-Satellit des GPS umkreist die Erde in einer Höhe von 20183 km.

   Bestimmen Sie die Umlaufzeit dieses Satelliten.

---

3. Ein Satellit umkreist die Erde in 220 km Höhe auf einer äquatorialen Bahn.

   a) Berechnen Sie die Umlaufsdauer um der Erde.

   b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit des Satelliten bezogen auf die Erde und vergleichen Sie diesen Wert mit der Bahngeschwindigkeit der Erde bei deren Umlauf um die Sonne.

---

4. In welcher Höhe über der Erde muss sich ein Fernsehsatellit wie z.B. Astra 1L befinden?

   Beachten Sie, dass sich der Satellit für einen Beobachter von der Erde aus immer an der gleichen Stelle befinden muss. Man spricht von einem so genannten geostationären Satellit.

---

5. Der Planet Jupiter wird von mehreren Monden umkreist. Die vier größten heißen auch Galileische Monde, nachdem sie 1610 von Galileo Galilei mit dem ersten astronomischen Fernrohr, das er selbst gebaut hatte, entdeckt wurden. Der Mond Callisto umkreist den Planeten auf einer Bahn mit einem Radius von $1{,}884 \cdot 10^6$ km mit einer Umlaufsdauer von 16,69 d.

   a) Berechnen Sie die Umlaufsdauer des Mondes Io, dessen Bahnradius $4{,}218 \cdot 10^6$ km beträgt.

   b) Berechnen Sie den Bahnradius von Europa, dessen Umlaufsdauer 3,55 d beträgt.

   c) Die Umlaufsdauer des Mondes Ganymed ist ziemlich genau doppelt so groß wie die von Europa - berechnen Sie den Faktor, um den der Bahnradius größer ist.

---

6. Ein Satellit bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Erde. Sein erdnächster Abstand beträgt 300 km, sein größter Abstand 2000 km.

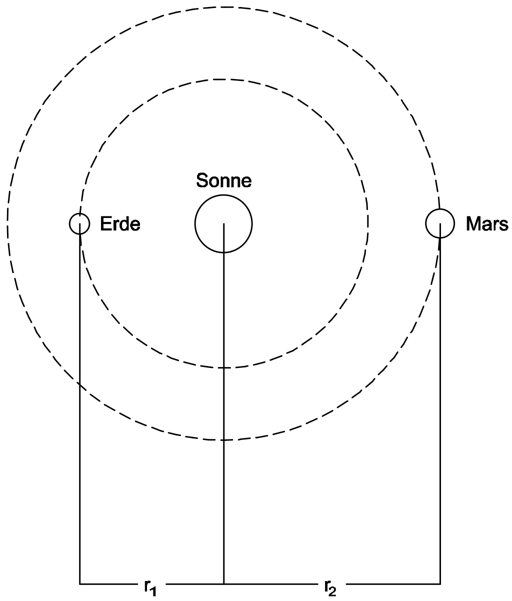
   Bestimmen Sie mit Hilfe des 2.Keplerschen Gesetzes das Verhältnis der Geschwindigkeiten an diesen Stellen

---

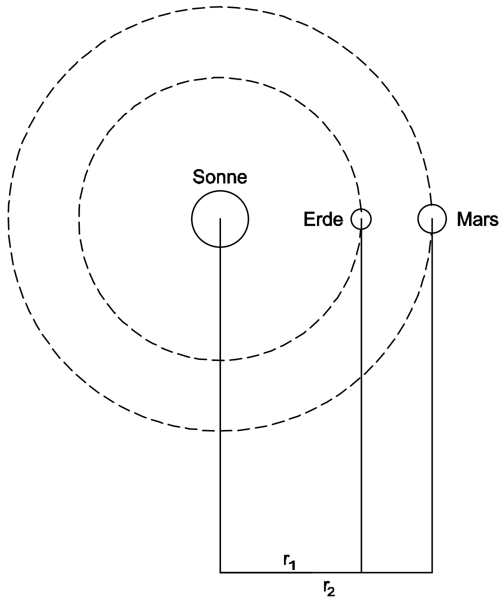
Lösungen:

1. Gegeben: $T_1 = 1{,}88\ \text{a}$ (Jahre)

Gesucht: d_{max} und d_{min}



Planeten in Opposition



Planeten in Konjunktion

Vergleichskörper ist die Erde mit $a_2 = 1\ \text{AE}$ und $T_2 = 1\ \text{a}$ (Jahr)

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad a_1^3 = a_2^3 \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

$$a_1 = \sqrt[3]{a_2^3 \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}} = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}} = a_2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

$$a_1 = 1\ \text{AE} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1{,}88\ \text{a}}{1\ \text{a}}\right)^2} = 1{,}52\ \text{AE}$$

$d_{max} = 1{,}52\ \text{AE} + 1\ \text{AE} = 2{,}52\ \text{AE}$ und $d_{mon} = 1{,}52\ \text{AE} - 1\ \text{AE} = 0{,}52\ \text{AE}$

---

2. 3. a) Gegeben: $h = 220\ \text{km} \quad \Rightarrow \quad r_1 = h + r_E = 20183\ \text{km} + 6370\ \text{km} = 26553\ \text{km}$

Gesucht: T_1

Vergleichskörper ist der Mond mit $r_2 = 384000\ \text{km}$ und $T_2 = 27{,}1\ \text{d}$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \Rightarrow \quad T_1^2 = T_2^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$$

$$T_1 = 27{,}1\ \mathrm{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{26553\ \mathrm{km}}{384000\ \mathrm{km}}\right)^3} = 0{,}49\ \mathrm{d} = 11{,}8\ \mathrm{h}$$

---

3. a) Gegeben: $h = 220\ \mathrm{km} \Rightarrow r_1 = h + r_E = 220\ \mathrm{km} + 6370\ \mathrm{km} = 6590\ \mathrm{km}$

Gesucht: T_1

Vergleichskörper ist der Mond mit $r_2 = 384000\ \mathrm{km}$ und $T_2 = 27{,}1\ \mathrm{d}$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow T_1^2 = T_2^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \Rightarrow T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$$

$$T_1 = 27{,}1\ \mathrm{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{6590\ \mathrm{km}}{384000\ \mathrm{km}}\right)^3} = 0{,}0803\ \mathrm{d} = 1\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min}$$

b) Gesucht: v_1

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot r_1}{T_1} \quad v_1 = \frac{2\pi \cdot r_1}{T_1} \quad v_1 = \frac{2\pi \cdot 6590\ \mathrm{km}}{1{,}93\ \mathrm{h}} = 21443\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 5{,}96\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{365{,}25 \cdot 24} = 107174\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 29{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

---

4. Gegeben: $T_1 = 1\ \mathrm{d}$

Gesucht: h

Vergleichskörper ist der Mond mit $r_2 = 384000\ \mathrm{km}$ und $T_2 = 27{,}1\ \mathrm{d}$

$$r_1 = r_2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \quad r_1 = 384000\ \mathrm{km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1\ \mathrm{d}}{27{,}1\ \mathrm{d}}\right)^2} = 42562\ \mathrm{km}$$

$$h = r_1 - r_E = 42562\ \mathrm{km} - 6370\ \mathrm{km} \approx 36 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

---

5. a) Gegeben:

	Radius	Umlaufsdauer
Io	$r_1 = 4{,}218 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$	T_1
Callisto	$r_2 = 1{,}884 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$	$T_2 = 16{,}69$ d (Tage)

Gesucht: T_1

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow T_1^2 = T_2^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \Rightarrow T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$$

$$T_1 = 16{,}69 \text{ d} \cdot \sqrt{\left(\frac{4{,}218 \cdot 10^6 \text{ km}}{1{,}884 \cdot 10^6 \text{ km}}\right)^3} = 55{,}91 \text{ d}$$

b) Gegeben:

	Radius	Umlaufsdauer
Europa	r_1	$T_1 = 3{,}55$ d
Callisto	$r_2 = 1{,}884 \cdot 10^6$ km	$T_2 = 16{,}69$ d (Tage)

Gesucht: T_1

$$r_1 = r_2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

$$r_1 = 1{,}884 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3{,}55 \text{ d}}{16{,}69 \text{ d}}\right)^2} = 0{,}6713 \cdot 10^6 \text{ km}$$

c) $$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = 4 \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 4 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{4} = 1{,}59$$

Der Bahnradius von Ganymed ist 1,59 so groß wie der von Callisto.
