Die Keplerschen Gesetze

==

1. Welche Geschwindigkeit hat ein Erdsatellit, der in 1000 km Höhe eine Kreisbahn um die Erde beschreibt?

Lösung:

Satellit: $r = a_1 = 1000\text{ km} + 6370\text{ km} = 7370\text{ km}$

Mond: $a_2 = 384000\text{ km}$ und $T_2 = 27{,}3\text{ d}$

Gesucht: v_S

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

$$T_1 = 27{,}3\text{ d} \cdot \sqrt{\left(\frac{7370\text{ km}}{384000\text{ km}}\right)^3} = 0{,}0726\text{ d} = 1{,}74\text{ h}$$

$$v_S = \frac{2\pi \cdot r}{T_1} \qquad v_S = \frac{2\pi \cdot 7370\text{ km}}{1{,}74 \cdot 3600\text{ s}} = 7{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

---

2. Der HALLEYSCHE Komet ist alle 76 Jahr zu sehen und kommt bei jedem Umlauf der Sonne 87 Millionen Kilometer nahe.

   Berechne die große Halbachse a des Kometen.

Lösung:

Komet: $T_1 = 76\text{ a}$

Erde: $T_2 = 1\text{ a}$ und $a_2 = 1\text{ AE} = 149{,}6 \cdot 10^6\text{ km}$

Gesucht: a_1

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$$

$$a_1 = 1\text{ AE} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{76\text{ a}}{1\text{ a}}\right)^2} = 17{,}9\text{ AE} = 2{,}7 \cdot 10^9\text{ km}$$

---

3. Berechnen Sie den Bahnradius sowie die Flugbahnhöhe des ersten Satelliten SPUTNIK I, der eine Umlaufsdauer von 96 min hatte.

Lösung:

Satellit: $T_1 = 96 \text{ min}$

Mond: $a_2 = 384000 \text{ km}$ und $T_2 = 27{,}3 \text{ d}$

Gesucht: $r = a_2$ und h

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$$

$$a_1 = 384000 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{96 \text{ min}}{27{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min}}\right)^2} = 6964 \text{ km}$$

$$h = 6964 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 594 \text{ km}$$

---

4. Berechnen Sie die Umlaufsdauer eines Satelliten, der die Erde in 200 km umkreist.

Lösung:

Satellit: $r = a_1 = 200 \text{ km} + 6370 \text{ km} = 6570 \text{ km}$

Mond: $a_2 = 384000 \text{ km}$ und $T_2 = 27{,}3 \text{ d}$

Gesucht: T_1

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

$$T_{12} = 27{,}3 \text{ d} \cdot \sqrt{\left(\frac{6570 \text{ km}}{384000 \text{ km}}\right)^3} = 0{,}061 \text{ d} = 88 \text{ min}$$

---

5. Der Planet JUPITER wird von mehreren Monden umkreist. Die vier größten Monde heißen auch GALILEIsche Monde, nachdem sie 1610 von GALILEI GALILEO mit dem ersten astronomischen Fernrohr, das er selbst gebaut hatte, entdeckt wurden.

   Der Mond CALLISTO umkreist den Planeten auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $1{,}884 \cdot 10^6$ km mit einer Umlaufsdauer von 16,69 d.

   a) Berechnen Sie die Umlaufsdauer des Mondes IO, dessen Bahnradius $4{,}218 \cdot 10^6$ km beträgt.

   b) Berechnen Sie den Bahnradius von EUROPA, dessen Umlaufsdauer 3,55 d beträgt.

Lösung:

Mit dem 3. Keplerschen Gesetz ergibt sich

	CALLISTO	IO	EUROPA
r	$1{,}884 \cdot 10^6$ km	$4{,}218 \cdot 10^6$ km	$0{,}6713 \cdot 10^6$ km
T	16,69 d.	55,91 d	3,55 d

---

6. Der Planetoid Eros besitzt eine Umlaufszeit von 643 Tagen.

   Berechnen Sie seine mittlere Entfernung von der Sonne in so genannten Astronomischen Einheiten.

Lösung:

Vergleichskörper ist die Erde. Es ergibt sich: $a_1 = 1\ \text{AE} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{643}{365}\right)^2} = 1{,}46\ \text{AE}$

---

7. Plutos mittlere Entfernung (große Halbachse seiner Bahn) von der Sonne beträgt rund 39,7 AE.

   Welche mittlere Bahngeschwindigkeit hat Pluto?

Lösung:

Vergleichskörper ist die Erde.

Damit gilt für die Umlaufszeit des Pluto $T_1 = 1\ \text{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{39{,}7\ \text{AE}}{1\ \text{AE}}\right)^3} = 250\ \text{a}$

Mittlere Bahngeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{2\pi \cdot 39{,}7 \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}}{250 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s}} = 4{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

---

8. Ein Satellit bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Erde. Sein erdnächster Abstand beträgt 300 km, sein größter Abstand 2000 km.

   Berechne seine Umlaufsdauer.

Lösung:

Große Halbachse der Satellitenbahn:

$$a_1 = \frac{300\ \text{km} + 2000\ \text{km} + 2 \cdot 6370\ \text{km}}{2} = 7520\ \text{km}$$

Vergleichskörper ist der Mond: $T_1 = 27{,}3\ \text{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{7520\ \text{km}}{384000\ \text{km}}\right)^3} = 0{,}075\ \text{d} = 1{,}8\ \text{h}$
