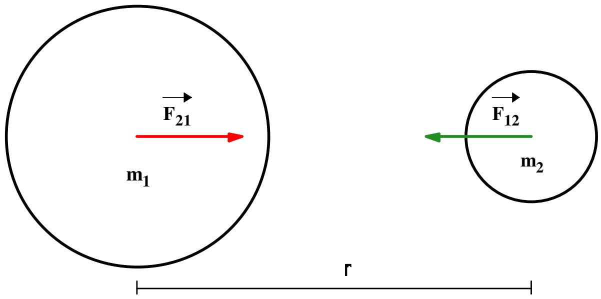
Das Newtonsche Gravitationsgesetz
==



Zwei Massenpunkte oder zwei homogenen Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r bzw. deren Mittelpunkte den Abstand r haben, üben aufeinander jeweils eine anziehende Kraft aus.

Die beiden Kräfte wirken entlang der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte bzw. der Mittelpunkte der beiden Kugeln und haben den Betrag

$$\boxed{F_{12} = F_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Man bezeichnet diese Erscheinung als Gravitation und bezeichnet die auftretenden Kräfte als Gravitationskräfte.

G ist die Gravitationskonstante. Es ist $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Folgerungen:

a) Die Gewichtskraft, die auf einen Körper mit der Masse m, wirkt, ist die Gravitationskraft, welche die Erde auf den Körper ausübt.

Betrachtet man die Erde als homogene Kugel mit der Masse M_E und dem Radius r_E: dann gilt

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r_E^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M_E}{r_E^{\,2}}$$

Dabei ist g die auf der Erdoberfläche herrschende Fallbeschleunigung.

Im Abstand r vom Erdmittelpunkt gilt

$$g = \boxed{G \cdot \frac{M_E}{r^2}}$$

d.h. die Fallbeschleunigung hängt vom jeweiligen Ort ab.

In diesem Zusammenhang nennt man g auch Feldstärke des von der Erde erzeugten Gravitationsfeldes. Ein Feld ist dabei ein verändertes Raumgebiet, in dem auf bestimmte Körper

b) Wie die Erde erzeugen auch alle Himmelskörper Gravitatuionsfelder.

c) Bewegt sich ein Körper um ein Zentralgestirn, dann ist es die Gravitationskraft, die den Körper auf seiner Bahn hält. Handelt es sich um eine Kreisbahn, dann ist die Gravitationskraft gleich der erforderlichen Zentripetalkraft.

d) Das 2. Keplersche Gesetz ist eine

Anwendungen :

1. Bestimmung der Erdmasse M_E

Da die Gewichstskraft eines Körpers der Masse m auf der Erde das Resultat der Anziehung durch die Erde ist gilt :

$$mg = G\cdot\frac{M_E m}{R^2} \Leftrightarrow M_E = \frac{g\cdot R^2}{G} \quad M_E = \frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}\text{kg} = 5{,}97\cdot10^{24}\text{kg}$$

Mittlere Dichte des Materials, aus dem die Erde besteht :

$$\text{v} \quad \rho_E = \frac{m_E}{V_E} = \frac{m_E}{\frac{4}{3}\pi R_E{}^3} \quad \rho_E = \frac{5{,}97\cdot10^{24}\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6{,}37\cdot10^6\text{m})^3} = 5{,}51\cdot10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

2. Bestimmung der Sonnenmasse M_S

Die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Gravitationskraft hält die Erde auf ihrer Bahn :

$$G\cdot\frac{M_S M_E}{r^2} = M_E\omega^2 r = M_E\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Leftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \quad M_S = 1{,}99\cdot10^{30}\text{kg}$$

$$\rho_S = 1{,}42\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

3. Geschwindigkeit eines Satelliten in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_E M}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R}}$$

Umlaufdauer : $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_E}}$

3. Die Hubarbeit im Schwerefeld der Erde

Problem : Die Fallbschleunnigung ist keine Konstante

$$W_h(r_1 \to r_2) = G\cdot\frac{M_E\cdot m}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = GM_E m(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

$$W_h(r_2 \to r_3) = G\cdot\frac{M_E\cdot m}{r_2 r_3}(r_3 - r_2) = GM_E m(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2})$$

.....

$$W_h(r_{n-1} \to r_n) = G\cdot\frac{M_E\cdot m}{r_{n-1} r_n}(r_n - r_{n-1}) = GM_E m(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}})$$

$$W = W_h(r_1 \to r_2) + W_h(r_2 \to r_3) + ... + W_h(r_{n-1} \to r_n) = GM_E M(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n})$$

Um einen Körper der Masse m von der Entfernung r_1 vom Erdmittelpunkt in die Enternung r_2 mit $r_2 > r_1$ zu bringen, ist die Arbeit

$$\boxed{W_{12} = G\cdot m\cdot M_E\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

erforderlich. Diese Arbeit wird als potentielle Energie gespeichert.

Ein Körper muss daher mindestens die kinetische Energie $E_{kin} = G\cdot m\cdot M_E\cdot\frac{1}{r_E}$ haben, damit er mit ihr in der Lage ist, den Anziehungsbereich der Erd beliebig weit hinter sich zu lassen.

Die sich daraus ergebende Mindestgeschwindigkeit

$$\boxed{v_F = \sqrt{\frac{2G\cdot M_E}{r_E}}}$$

heißt Fluchtgeschwindigkeit: