Gravitation

==

1. Der Mars hat einen Durchmesser von 6770 km und eine Masse von $6{,}4434 \cdot 10^{23}$ kg.

   Berechne den Ortsfaktor!

---

2. In welcher Höhe über dem Saturn (Radius 58410 km; Masse $5{,}6744 \cdot 10^{26}$ kg) ist die Ge- Gichtskraft eines Körpers halb so groß, wie auf der Saturnoberfläche

---

3. Die Raumstation MIR umkreiste die Erde in einer Höhe von $h = 420$ km über der Erd- oberfläche.

   Wie oft umrundete sie an einem Tag die Erde?

---

4. Mars und Erde haben einen Durchmesser von of 6775 km bzw. 12775 km. Die Masse des des Mars ist 0,107mal kleiner als die der Erde.

   Welche Gewichtskraft erfährt ein Körper, dessen Gewicht auf der Erde gleich 200 N ist, auf dem Mars ?

---

5. Ein künstlicher Satellit mit der Masse 500 kg umkreist in 250 km Höhe die Erde.

   a) Welche Geschwindigkeit hat er in dieser Höhe ?

   b) Welche Energie ist erforderlich um ihn in diese Umlaufsbahn zu bringen ?

---

6. Ein hypothetischer Planet hat einen Radius von 500 km und die Fallbeschleunigung auf seiner Oberfläche ist gleich $3{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Der Planet rotiert nicht.

   a) Welche Masse besitzt der Planet ?

   b) Welche Geschwindigkeit benötigt eine Rakete mindestens um den Anziehungsbereich des Planeten zu verlassen ?

   c) Welche Höhe erreicht ein Geschoß, das mit $1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ in radialer Richtung von der Oberfläche des Planeten abgefeuert wird ?

   d) Ein Raumschiff kreist in 500 km Höhe um den Planeten. Berechne seine Umlaufsdauer !

---

7. Wie würde sich die Fallbeschleunigung g auf der Erdoberfläche ändern, wenn der Erdradius sich um einen Meter vergrößerte und die Dichte konstant bliebe ?

---

8. Der Radius der Mondbahn ist etwa 60 mal so gross wie der Radius der Erdkugel. Die Erde hat eine etwa 81 mal so grosse Masse wie der Mond.

   An welchem Punkt der Verbindungslinie Erde-Mond wird ein Körper von beiden Himmelskörpern mitgleich grosser entgegengesetzter Kraft angezogen ?

Lösung

==

1. $m \cdot g = G^* \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g = G^* \cdot \frac{M}{r^2} \qquad g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{6{,}4434 \cdot 10^{23}\ kg}{(3{,}385 \cdot 10^6)^2} = 3{,}8\ \frac{m}{s^2}$

----

2. $G^* \cdot \frac{m \cdot M}{(r+h)^2} = \frac{1}{2} \cdot G^* \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(r+h)^2} = \frac{1}{2r^2} \quad \Rightarrow \quad (r+h)^2 = 2r^2 \quad \Rightarrow \quad r+h = r \cdot \sqrt{2}$

$h = r \cdot \sqrt{2} - r = r \cdot (\sqrt{2} - 1) \quad r = 58410\ km \cdot (\sqrt{2} - 1) = 24184\ km$

----

3. Kreisbahnbedingung: $F_r = G^* \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$

G^* ist die Gravitationskonstante

m Masser der Raumstation

$r = r_e + h$ mit dem Erddradius r_e

$m \cdot (2\pi \cdot f)^2 \cdot r = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{r^3}}$

Masse der Erde ergibt sich aus: $g = G^* \cdot \frac{M}{r_e^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{g \cdot r_E^2}{G^*}$

Eingesetzt: $f = \; = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{G^* \cdot \frac{g \cdot r_e^2}{g^+}}{r^3}}\ 0\ \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot r_E^2}{r^3}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r_E}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$

Damit ergibt sich $f = 0{,}00017956\ s^{-1}$ und $n = 15{,}5$

----

4. $g_{Erde} = G^* \cdot \frac{M_{Erde}}{r_{Erde}^2} \qquad g_{Mars} = G^* \cdot \frac{M_{Mars}}{r_{Mars}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_{Mars}}{g_{Erde}} = \frac{M_{Mars}}{M_{Erde}} \cdot \frac{r_{Erde}^2}{r_{Mars}^2} \qquad g_{Mars} = 0{,}38 g_E$

$F' = 3{,}8 \cdot 200\ N = 76\ N$

----

5. a) $m \cdot \frac{v^2}{r} = G^* \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G^* \cdot \frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{G^* \cdot \frac{g \cdot r_E^2}{G^*}}{r}} = r_E \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$

$v = 6370\ km \cdot \sqrt{\frac{9{,}81\ \frac{m,}{s^2}}{6620000\ m}} = 7{,}75\ \frac{km}{h}$

b) Aufzuwendende Energie: $E = \frac{m}{2}v^2 + G^*\cdot m\cdot M\cdot\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r}\right)$

$$E = \frac{m}{2}v^2 + G^*\cdot m\cdot \frac{g\cdot r_E^2}{G^*}\cdot\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r}\right) = \frac{m}{2}v^2 + m\cdot g\cdot r_E^2\cdot\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r}\right)$$

$$E = \frac{500\ \text{kg}}{2}\cdot\left(7750\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 500\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ \text{m})^2\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6\ \text{m}} - \frac{1}{6{,}62\cdot 10^6\ \text{m}}\right) =$$

$$= 16{,}7\ \text{GJ}$$

---

6. a) $M = \frac{g\cdot r^2}{G^*}$ $\quad M = \frac{3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(500000\ \text{m})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}} = 1{,}12\cdot 10^{22}\ \text{kg}$

b) Hubarbeit im Schwerefeld der Erde: $W = G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_E}\right) = G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r_A}$, wenn

$r_E \rightarrow \infty$

Kinetische Energie wird über Hubarbeit potenzielle Ergie

$$\frac{m}{2}\cdot v^2 = G\cdot m\cdot M\cdot\frac{1}{r_A} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{2\cdot g\cdot r_A} \quad v = 1{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

c) $\frac{m}{2}\cdot v^2 = 2\cdot G^*\cdot m\cdot M\cdot\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_b}\right) \quad\Rightarrow\quad v^2 = 2\cdot G^*\cdot M\cdot\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \quad \frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_a} - \frac{v^2}{2\cdot G^*\cdot M}$

$r_B = \frac{1}{\frac{1}{r_A} - \frac{v^2}{2\cdot G^*\cdot M}} = 750$ km Das Raumschiff erreicht eine Höhe von 250 km.

$T = 2\pi\cdot\frac{r}{r_P}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}4\ \text{h} \quad T = 2\pi\cdot\frac{1000\ \text{km}}{500\ \text{km}}\cdot\sqrt{\frac{1000000\ \text{m}}{3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2\ \text{h}$ (vgl. Aufgabe 3)

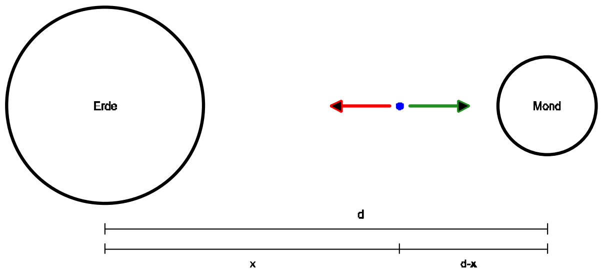
---

7. $g = G^*\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot r_E^3\cdot\rho}{r_E^2}$ und $g_1 = G^*\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot r^3\cdot\rho}{r^2}$

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r}{r_E} \Rightarrow g_1 = \frac{r}{r_E} \cdot g = \frac{6370{,}001\text{ km}}{6370\text{ km}} \cdot g = 1{,}00000016\text{ g}$$

---

8. 8.



Kräftgleichgewicht :

$$G^* \cdot \frac{M_{Erde} \cdot m}{x^2} = G^* \cdot \frac{M_{Mond} \cdot m}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{M_{Erde}}{x^2} = \frac{M_{Mond}}{(d-x)^2} \Rightarrow 81 = \frac{x^2}{(d-x)^2} d$$

$$9 = \frac{x}{d-x} \Rightarrow x = \frac{9}{10} d$$
