Die Keplerschen Gesetze

---

1. Galileische Monde

a) $\frac{T_{Io}{}^2}{T_{Ca}{}^2} = \frac{a_{Io}{}^3}{a_{Ca}{}^3} \quad \Rightarrow \quad T_{Io} = T_{Ca} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_{Io}}{a_{Ca}}\right)^3}$

$$T_{Io} = 16{,}69\ \mathrm{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{4{,}218 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{1{,}884 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}\right)^3} = 55{,}91\ \mathrm{d}$$

b) $a_{Eu} = a_{Ca} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{Eu}}{T_{Ca}}\right)^2} \qquad a_{Eu} = 1{,}884 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3{,}55\ \mathrm{d}}{16{,}69\ \mathrm{d}}\right)^2} \approx 0{,}6713 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$

c) $a_{Ga} = a_{Eu} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{Ga}}{T_{Eu}}\right)^2} \qquad a_{Ga} = a_{Eu} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 1{,}59 \cdot a_{Eu}$

---

2. Gegeben:

	große Halbachse bzw. mittlerer Abstand	Umlaufsdauer
Erde	1 AE	365 d
Ceres		1682 d

Gesucht: a_{Ceres}

$$a_{Ceres} = a_{Erde} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1682\ \mathrm{d}}{365\ \mathrm{d}}\right)^2} = 2{,}77\ \mathrm{AE}$$

Die Newtonschen Gesetze

---

1. Wenn ruckartig angefahren wird, dann wird der abgeschleppte Wagen stark beschleunigt.

Nach actio = reactio zieht der abgeschleppte Wagen dann mit einer großen Kraft am Seil.

---

2. Gegeben: $m = 250\ \mathrm{kg}$ und $M = 900\ \mathrm{kg}$ sowie $\Delta = 1{,}6\ \mathrm{s} \rightarrow 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \rightarrow 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a = \frac{1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}6\ \mathrm{s}} = 0{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Bewegung nach oben:

$F_S = (m + M)\cdot(a + g) \quad F_S = 1{,}16 \text{ kN}$

Bewegung nach unten:

$F_S = (m + M)\cdot(g - a) \quad F_s = 10{,}2 \text{ kN}$

---

3. Gegeben: $m = 1{,}2$ t und $\tan\alpha = 0{,}15 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(0{,}15) = 9{,}5°$

$x = 100 \text{ m} \quad \rightarrow \quad v = 15 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gesucht: Motorkraft F_M

Beschleunigende Kraft: $F = F_M - F_H$

Zweites Newtonsches Gesetz: $F_M - F_H = m\cdot a \quad \Rightarrow \quad F_M = F_H + m\cdot a = m\cdot g\cdot\sin\alpha + m\cdot a$

Berechnung von a: $v^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2x} \quad a = \frac{(15 \ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot\ 100 \text{ m}} = 1{,}125 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Eingesetzt: $F_M = 1200 \text{ kg}\cdot\left[9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 9{,}5° + 1{,}125 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] = 3{,}1 \text{ kN}$

---

4. Gegeben: $m_1 = 1$ kg und $a = \frac{1}{10}g$

a) Gesucht: m_2

Beschleunigende Kraft: $F = m_2\cdot g - m_1\cdot g$

Beschleunigte Masse: $m = m_1 + m_2$

Zweites Newtonsches Gesetz: $m_2\cdot g - m_1\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a = (m_1 + m_2)\cdot\frac{1}{10}g$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{10}g\cdot m_2 = \frac{11}{10}g\cdot m_1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{11}{9}m_1 = 1{,}2 \text{ kg}$

b) Gesucht: t für $s = 1\text{m}$

$s = \frac{1}{2}a\cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad t = \sqrt{\frac{2 \text{ m}}{0{,}1 \cdot 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}4 \text{ s}$

---

5. Gegeben: $m = 1060\ \text{kg}$ und $v = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sowie $F_W = 0{,}05 \cdot G$

a) Gesucht: F_M

Für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit muss die Summe aller angreifenden Kräfte gleich Null sein.

Also $F_M = F_W \quad F_M = 0{,}05 \cdot 1060\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}52\ \text{kN}$

b) Gesucht: F_M, wenn $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{12\ \text{s}} = 1{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$F_M - F_W = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_M = F_W + m \cdot a \quad F_M = 520\ \text{N} + 1060\ \text{kg} \cdot 1{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2{,}3\ \text{kN}$$

Aufgabe schwierig! Versehentlich in das Übungsblatt aufgenommen!

Für Interessierte

Problemanalyse

1. Beide Körper bewegen sich nicht mit der gleichen Beschleunigung. Der Körper am Flaschenzug bewegt sich nur mit der halben Beschleunigung wie der auf der schiefen Ebene.

2. Die lose Rolle muss berücksichtigt werden.

Es empfiehlt sich die Methode der isolierten Körper d.h. man betrachtet die Körper unabhängig voneinander.

6. Gegeben: $m = 300\ \text{g}$ und $M = 700\ \text{g}$ sowie $l = 5{,}00\ \text{m}$ und $h = 3{,}00\ \text{m}$

$$\text{Also } \tan\alpha = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 34{,}4°$$

Gesucht: a

Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes auf die beiden Körper

(1) $M \cdot g - 2 \cdot T = M \cdot \frac{a}{2}$

(2) $T - F_H = m \cdot a$

Dabei ist T die Kraft, die das Seil auf den Körper auf der schiefen Ebene ausübt.

Aus (2) folgt: $T = F_H + m \cdot a$

In (1) : $M \cdot g - 2 \cdot (F_H + m \cdot a) = M \cdot \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M \cdot g - 2F_H = M \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot ma$

$$a = \frac{M \cdot g - 2F_H}{\frac{1}{2}M + 2m} \qquad a = \frac{0{,}7\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \cdot 0{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 34{,}4°}{0{,}35\ \text{kg} + 0{,}6\ \text{kg}} = 4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Energieerhaltung

===
=

1. Gegeben: $m = 0{,}20$ kg und $v = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sowie $h = 5{,}0$ m

   Gesucht: v_1

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = mg \cdot h + \frac{1}{2}m \cdot {v_1}^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v^2 - 2g \cdot h}$$

$$v_1 = \sqrt{(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ \text{m}} = 17{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

----

2. Gegeben: $m = 1{,}2$ kg, $h = 0{,}40$ m und $D = 0{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

   Gesucht: v

$$mg \cdot h = \frac{1}{2}D \cdot h^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2mg \cdot h - D \cdot h^2}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2\ \text{m} - 0{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}4\ \text{m})^2} = 2{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Impulserhaltung

===
=

1. Gegeben: $m_1 = 15$ t und $v_1 = 8{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sowie $m_2 = 18$ t und $v_{21} = 3{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

   Gesucht: u

   Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u = \frac{15\,t \cdot 8\,\frac{km}{h} + 18\,t \cdot 3\,\frac{km}{h}}{15\,t + 18\,t} = 5{,}3\,\frac{km}{h}$$

---

2. Gegeben: $m = 2\,kg$ und $v_1 = 8\,\frac{m}{s}$ sowie $v_2 = 0\,\frac{m}{s}$

$$u_1 = -4\,\frac{m}{s} \text{ und } u_2 = 4\,\frac{m}{s}$$

Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1}{u_2}$$

$$m_2 = \frac{2\,kg \cdot 8\,\frac{m}{s} - 2\,kg \cdot \left(-4\,\frac{m}{s}\right)}{4\,\frac{m}{s}} = 6\,kg$$

Die Aufgabe lässt sich auch mit dem Energiererhaltungssatz lösen!

---

3. Gegeben: $v_2 = -v_1 = -v$ und $u_2 = 0$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot u^2 \quad \Leftrightarrow \quad (m_1 + m_2) \cdot v^2 = m_1 \cdot u^2$$

Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v - m_2 \cdot v = m_1 \cdot u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1 \cdot v - m_2 \cdot v}{m_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1} \cdot v$$

Eingesetzt:

$$(m_1 + m_2) \cdot v^2 = m_1 \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1} \cdot v\right)^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 + m_2 = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1}$$

$$m_1^2 + m_1 m_2 = m_1^2 - 2 m_1 m_2 + m_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3 m_1 m_2 + m_2^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 3 m_1$$

Die Masse der Kugel, die nach dem Stoß ruht, muss dreimal so groß wie die Masse der anderen Kugel sein.

$$(m_1 + 3 m_1) \cdot v^2 = m_1 \cdot u^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 4 v^2 \quad \Rightarrow \quad u = -2v$$

Die erste Kugel bewegt sich dann mit doppelter Geschwindigkeit in die andere Richtung.

---

4. a) Gegeben: $m_1 = 60\text{ kg}$ und $v_1 = 18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sowie

$m_2 = 80\text{ kg}$ und $v_2 = 5{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gesucht: u

Impulserhaltung: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

$$u = \frac{60\text{ kg} \cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 80\text{ kg} \cdot 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{60\text{ kg} + 80\text{ kg}} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Wagen bewegt sich mit Peter zusammen mit $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in die Laufrichtung von Peter.

b) Gesucht: u, wenn $v_2 = -1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$u = \frac{60\text{ kg} \cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 80\text{ kg} \cdot (-1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}})}{60\text{ kg} + 80\text{ kg}} = 1{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Wagen bewegt sich mit $1{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in die Laufrichtung von Peter.

---

5. Gegeben: $m_1 = 600\text{ kg}$ und $v_1 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sowie $m_2 = 400\text{ kg}$

Gesucht: u

Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \qquad u = \frac{600\text{ kg} \cdot 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{600\text{ kg} + 400\text{ kg}} = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Lore bewegt sich mit $1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ weiter.
