V. Stochastik
==

5.1 Zählprinzip

Wählt man aus n Mengen mit z_1 bzw. z_2, ..., bzw. z_n Elementen nacheinander aus jeder Menge jeweils ein Element aus,

dann ergeben sich $\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot .... \cdot z_n}$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

Beispiel 1:

Anzahl der Vorspeisen auf einer Speisekarte: 3

Anzahl der Hauptgerichte: 5

Anzahl der Nachspeisen: 3

Dann gibt es $3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$ verschiedene Menüs.

Beispiel 2:

Wird ein Würfel zweimal hintereinander oder zwei unterscheidbare Würfel geworfen, dann erhält man $6 \cdot 6 = 36$ verschieden Ergebnisse.

Man wählt aus der Menge der Augenzahlen $\left\{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5;\, 6\right\}$ zweimal eine Augenzahl aus.

Beispiel 3:

Es gibt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ dreistellige Zahlen,

aber nur $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ dreistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern.

Also gibt es $900 - 648 = 252$ dreistellige Zahlen, die mindestens zwei gleiche Ziffern haben.

Folgerung:

n verschiedene Dinge lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot .... \cdot n$ verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.

Beispiel:

5 Personen können sich auf $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ verschiedene Arten nebeneinander in einer Reihe aufstellen.

5.2 Relative Häufigkeit

Ein Experiment, für dessen Ausgang es verschiedene Möglichkeiten gibt, heißt Zufallsexperiment.

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallexperiments bilden seine Ergebnismenge Ω.

Die Anzahl der möglichen Ergebnisse nennt man die Mächtigkeit von Ω und schreibt

$$\boxed{|\Omega| = n}.$$

Beispiele:

a) Das Werfen einer Münze mit der Ergebnismenge $\Omega = \left\{1; 2; 3; 4; 5; 6\right\}$

b) Das zweimalige Werfen einer Münze mit der Ergebnismenge $\Omega = \left\{WW; WZ; ZW; ZZ\right\}$.

Eine Teilmenge A von Ω nennt man Ereignis.

Da Ereignis A tritt ein, wenn das erzielte Ergebnis in A liegt.

Beispiel:

Beim Würfeln mit der Ergebnismenge $\Omega = \left\{1; 2; 3; 4; 5; 6\right\}$ ist das Ergebnis

A: Eine Quadratzahl wird gewürfelt

gegeben durch $A = \left\{1; 4\right\}$.

Wird ein Zufallsexperiment n-mal wiederholt und tritt ein Ereignis A z-mal ein, dann heißt

$$\boxed{H_n(A) = \frac{z}{n}}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses.

Beispiel:

Wenn man einen Würfel 20-mal wirft und 4-mal eine gerade Augenzahl fällt, dann ist die relative Häufigkeit von

A: Ein gerade Augenzahl wird gewürfelt

gleich $H_{20}(A) = \frac{11}{20} = 55\%$

5.3 Wahrscheinlichkeit und Laplace-Experimente

Besteht die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments aus n verschiedenen Ergebnissen und tritt kein Ergebnis bevorzugt ein, dann nennt man das Zufallsexperiment ein Laplace-Experiment und $p = \frac{1}{n}$ die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ergebnisses.

Ist A ein Ereignis, dass z Ergebnisse enthält, dann nennt man

$$\boxed{P(A) := \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} = \frac{z}{n}}$$

die Wahrscheinlichkeit von A.

Beispiel:

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Dann ist $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ und die die Wahrscheinlichkeiten von

A : Es wird eine Eins und ein Sechs gewürfelt

B : Die zweite Augenzahl ist um 2 größer als die erste

C : Die Summe der Augenzahlen ist 6

sind wegen

$A = \left\{(1;6), (6;1)\right\}, B = \left\{(1;3), (2;4), (3;5), (4;6)\right\}$

und $C = \left\{(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1)\right\}$

gegeben durch $P(A) = \frac{1}{18}$, $P(B) = \frac{1}{9}$ und $P(C) = \frac{5}{38}$.

Ist A ein Ereignis, dann heißt $\overline{A}$: "A tritt nicht ein" das Gegenereignis von A.

Als Menge geschrieben, enthält $\overline{A}$ alle Ergebnisse aus der Ergebnismenge Ω, die nicht zu A gehören. Es gilt

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Beispiel:

Wird eine Laplace-Münze dreimal geworfen, dann ergibt sich als Ergebnisraum

$$\Omega = \left\{ \text{WWW, WWZ, WZW, ZWW, WZZ, ZWZ, ZZW, ZZZ} \right\}$$

Für das Ereignis

A: Genau einmal Wappen

gilt dann

$A = \left\{ \text{WZZ, ZWZ, ZZW} \right\}$ und damit $P(A) = \frac{3}{8}$.

Damit ist $\overline{A}$: Es wird kein, zwei- oder dreimal Wappen geworfen

und $\overline{A} = \left\{ \text{ZZZ, ZWW, WZW, WWZ, WWW} \right\}$ und $P(\overline{A}) = \frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}$

Sind A und B zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments, dann definiert man die Ereignisse

$A \cap B$: A und B treten ein

$A \cup B$: A oder B tritt ein

Als Menge geschrieben, enthält $A \cap B$ alle Ergebnisse, die zu A und B gehören.

$A \cup B$ enthält alle Ergebnisse, die zu A oder (<u>kein entweder - oder!</u>) B gehören.

Beispiel:

Wird eine Münze dreimal geworfen und sind die Ereignisse A und B festgelegt durch

A: Es wird mindestens zweimal Wappen geworfen

B: Der letzte Wurf ist Zahl

dann ist

$$A = \left\{ \text{WWW, WWZ, WZW, ZWW} \right\} \text{ und } B = \left\{ \text{WWZ, WZZ, ZWZ, ZZZ} \right\} \text{ und damit}$$

$$A \cap B = \left\{ \text{WWZ} \right\} \text{ und } A \cup B = \left\{ \text{WWW, WWZ, WZW, ZWW, WZZ, ZWZ, ZZZ} \right\}$$

5.4 Stufenexperimente, Baumdiagramme und Pfadregeln

Ein Zufallsexeriment, das sich aus mehreren aufeinanderfolgenden Teilexperimenten zusammensetzt, heißt ein stochastisches Stufenexperiment.

Die möglichen Ergebnisse eines Stufenexperiments mit den möglichen Teilergebnissen lassen sich durch ein Baumdiagramm veranschaulichen.

1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten deiner Teilergebnisse.

2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die in A liegen.

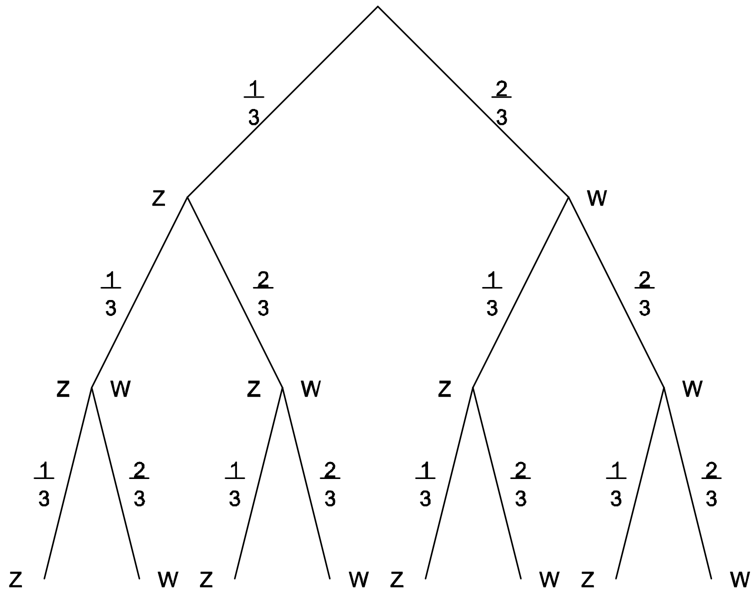
Beispiel 1:

Eine gezinkte Münze wird dreimal geworfen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn Wappen der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ geworfen wird.

a) A: Genau zweimal Wappen

c) B: Mindestens einmal Zahl.

d) C: Höchstens einmal Wappen.



$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{19}{27}$$

$$P(C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{20}{27}$$

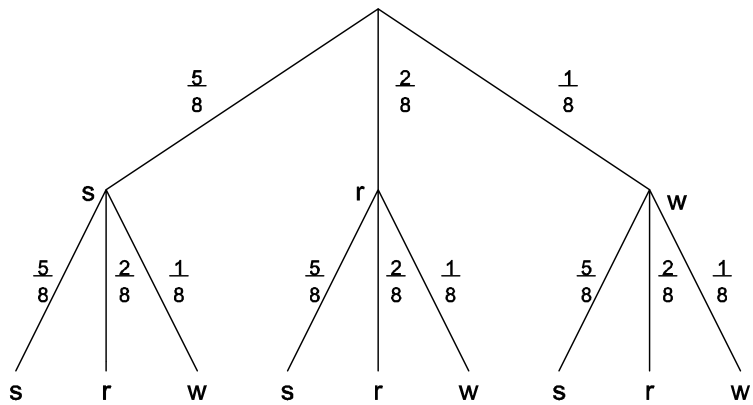
Beispiel 2:

In einer Urne befinden sich 5 schwarze, 2 rote und eine weiße Kugel. Es werden zwei Kugel

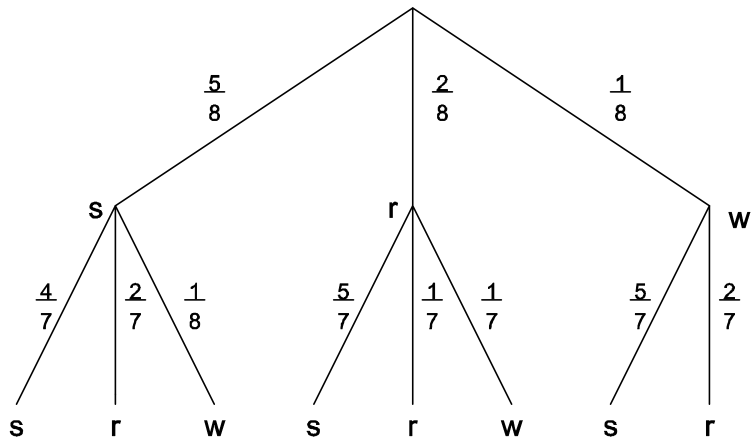
a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zwei verschiedenfarbige Kugeln?



$$a)\ P(A) = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{17}{32}$$



b) $P(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{17}{28}$

Übungsaufgaben

---

1. In einer Urne befinden sich 5 schwarze, 2 rote und eine weiße Kugel. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zwei verschiedenfarbige Kugeln?

---

2. Die Personen A und B vereinbaren folgendes Spiel:

   Die 4 Könige und die 4 Damen eines Kartenspiels werden gemischt und verdeckt aufgelegt.

   A und B ziehen nun abwechselnd eine Karte. Gewinner ist, wer als erstes einen König zieht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A, wenn er beginnt?

---

3. Das Spiel von Aufgabe 2 wird etwas abgewandelt. A beginnt mit dem Ziehen einer Karte. Anschließend aber dürfen B und A im Wechsel jeweils zwei Karten ziehen. Die Reihenfolge lautet also ABBAABB...)
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt nun A?

---

4. In zwei Urnen liegt jeweils eine nicht sichtbare Kugel. Eine Kugel ist schwarz, die andere weiß. Eine der Urnen wird zufällig ausgewählt, eine weiße Kugel dazugelegt, gut gemischt und dann eine Kugel gezogen. Die Kugel ist weiß!

   Würden Sie darauf wetten, dass die noch in der Urne liegende Kugel auch weiß ist?

Testaufgaben

---

1. Ein Laplace-Würfel, der mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet ist, wird zweimal nacheinander geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Augensumme 10 erhält

2. Peter wirft gleichzeitig einen roten und einen blauen Spielwürfel (Laplacewürfel). Er sagt zu seiner Schwester Susi: "Es gibt 11 verschiedene Augensummen: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12. Also wird jede Augensumme mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{11}$ erzielt.

   a) Susi widerspricht: "Die Augensummen sind nicht gleich wahrscheinlich, denn beispielsweise ..." Setzen Sie Susis Erklärung sinnvoll fort.

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Wurf mit diesen zwei Laplacewürfeln die Augensumme 8 erzielt.

---

3. Simon schießt mit seinem Fußball auf eine Torwand.

   Zielt er dabei auf das obere Loch, so trifft er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 20%. Zielt er auf das untere Loch, so trifft er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%.

a) Simon schießt zuerst einmal auf das obere und dann einmal auf das untere Loch.

   Zeichnen Sie das zugehörige, vollständig beschriftete Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Simon mit genau einem der beiden Schüsse sein Ziel trifft.

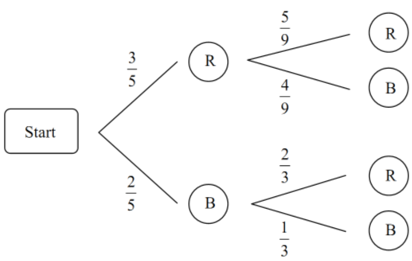
b) Simon schießt nun zehnmal auf das obere Loch. Betrachtet wird das Ereignis

   E: Simon trifft mit mindestens einem Schuss in das obere Loch.

   Formulieren Sie das Gegenereignis zu E in Worten und geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E berechnet werden kann

---

4. Aus einer Urne mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende Baumdiagramm.



a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden

b) Wurde in diesem Zufallsexperiment mit oder ohne Zurücklegen gezogen? Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand des Baumdiagramms.