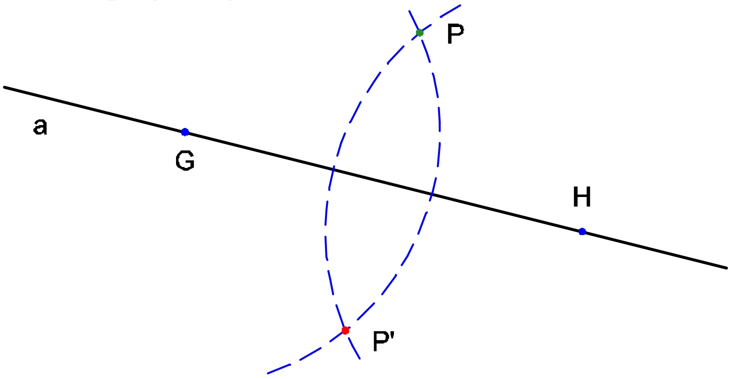
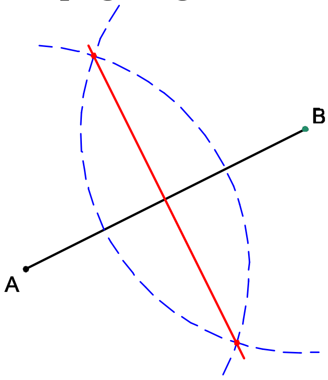
IV. Geometrie

4.1 Konstruktionen

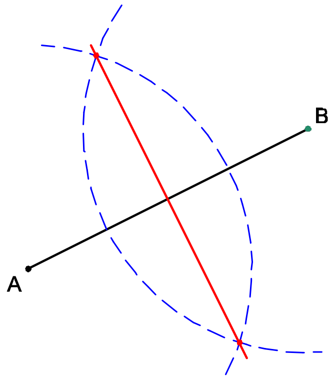
Achsenspiegelung



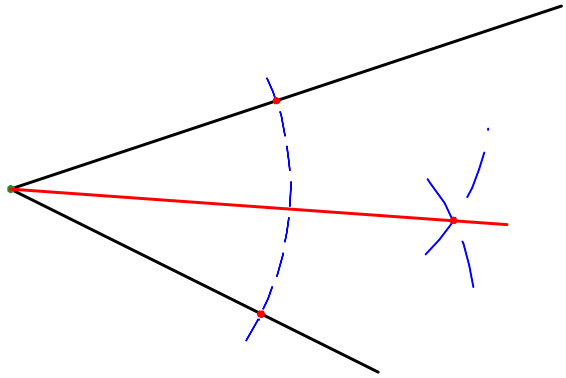
Punktspiegelung



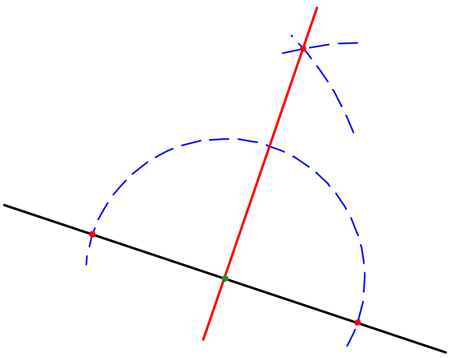
Mittelsenkrechte



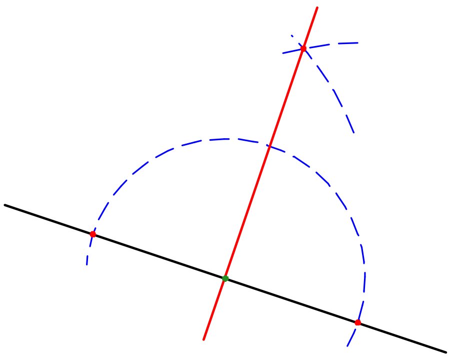
Winkelhalbierende



Lot errichten

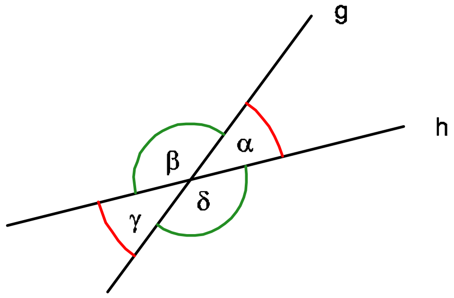


Lot fällen



4.2 Winkelsätze

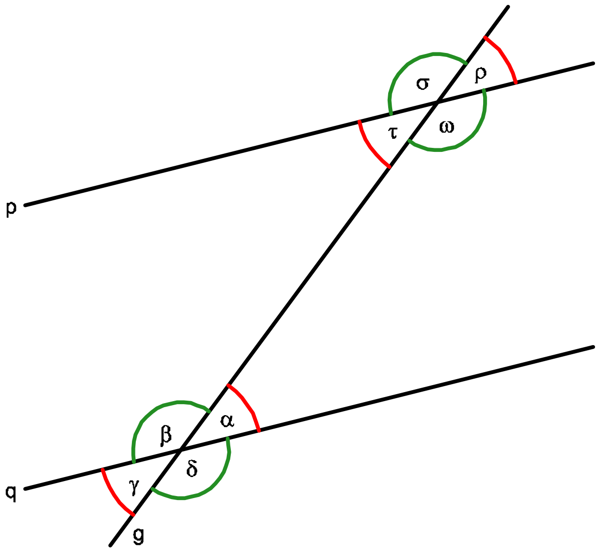
Für eine einfache Geradenkreuzung gilt:



Scheitelwinkel sind gleich groß $\boxed{\alpha = \gamma}$ bzw. $\boxed{\beta = \delta}$

und

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° $\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$ usw.



Für die Doppelkreuzung gilt: Die Geraden p und q sind genau dann parallel, wenn

Stufenwinkel gleich groß sind d.h. $\boxed{\alpha = \rho}$ bzw. $\boxed{\beta = \sigma}$ bzw. $\boxed{\gamma = \tau}$ bzw. $\boxed{\delta = \omega}$ gilt

oder

Wechselwinkel gleich groß sind d.h. $\boxed{\alpha = \tau}$ bzw. $\boxed{\beta = \omega}$ gilt

oder

Nachbarwinkel sich zu 180° ergänzen d.h. $\boxed{\alpha + \omega = 180^\circ}$ bzw. $\boxed{\beta + \tau = 180^\circ}$ gilt.

Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180° und im Viereck 360°.

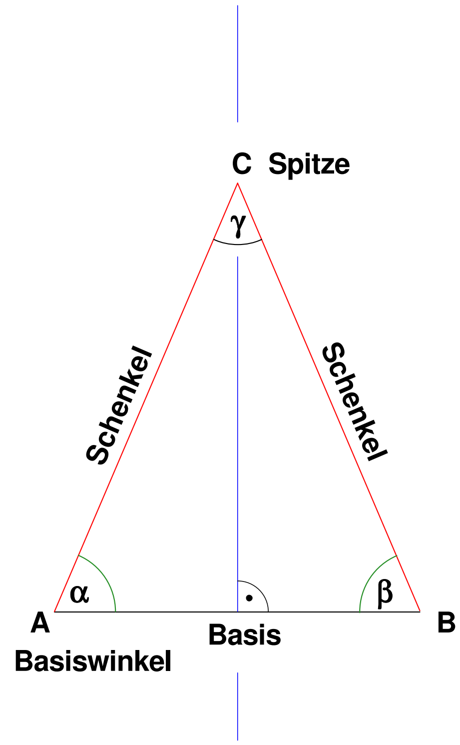
Allgemein bist die Summe der Innenwinkel im n-Eck gegeben durch

$$\boxed{(n-2)\cdot 180^\circ}$$

4.3 Besondere Dreiecke

Ein Dreieck heißt ***gleichschenklig***, wenn es zwei gleich lange Seiten besitzt.

Ein gleichschenkliges Dreieck ist zur Mittelsenkrechten der Basis achsensymmetrisch.



Ist ein Dreieck gleichschenklig, dann sind die Basiswinkel gleich groß.

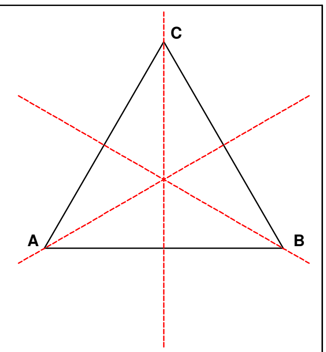
Es gilt auch die ***Umkehrung***

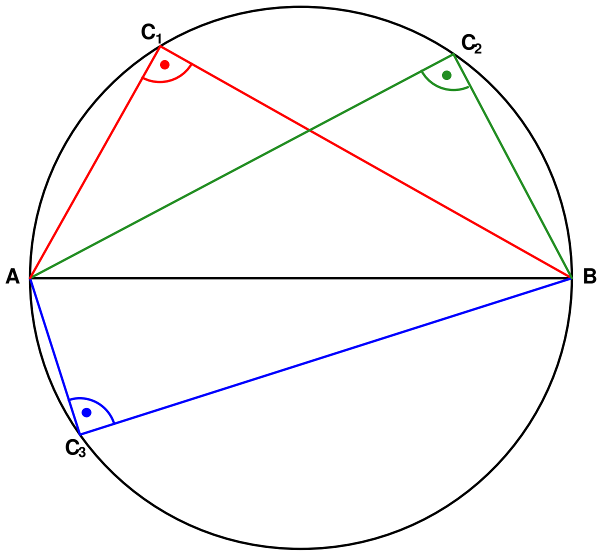
Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

Sonderfall :

Ein Dreieck heißt ***gleichseitig***, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn jeder Innenwinkel 60° misst.





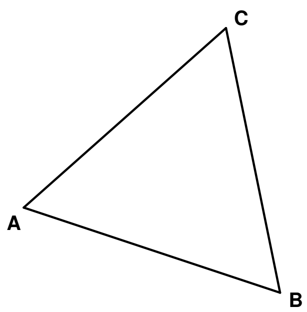
Satz des Thales :

Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf einem Kreis mit [AB] als Durchmesser liegt. Dieser Kreis heißt **Thaleskreis**.

Übungsaufgaben

BMT 1998

Zeichne alle Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks ABC ein.



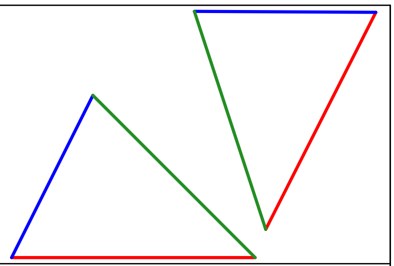
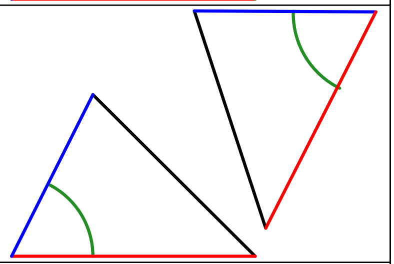
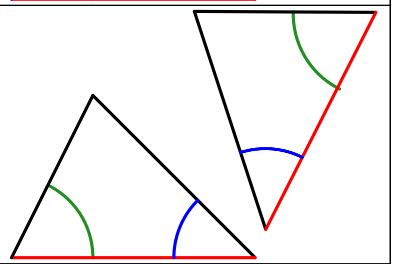
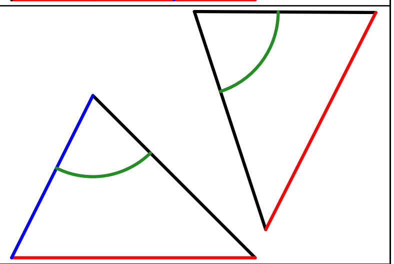
BMT 2001

a) Erläutere anschaulich anhand einer Skizze, welche besondere Eigenschaft die Punkte eines Thaleskreises haben

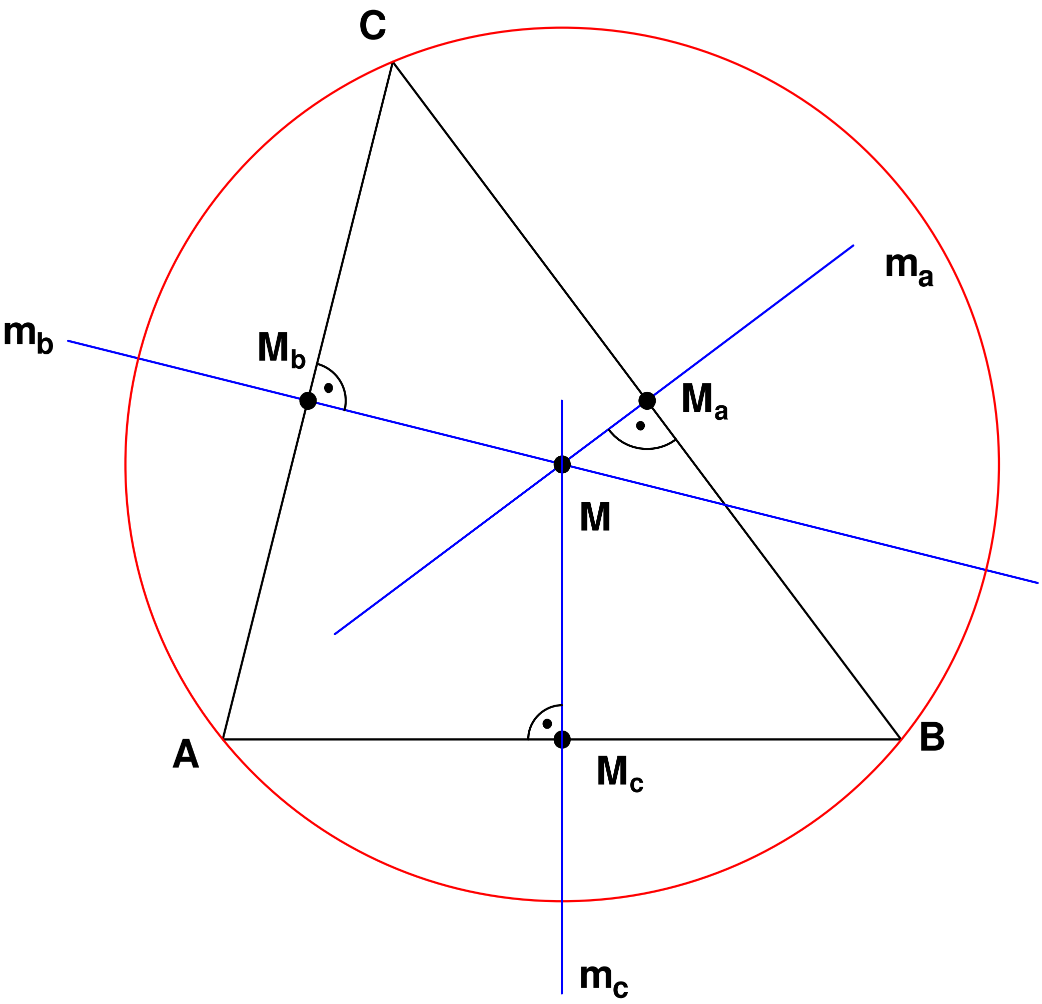
b) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = 8$ cm, $h_a = 3$ cm cm und $\alpha = 90°$.

Lote und Parallelen dürfen gegebenenfalls mit Hilfe des Geodreiecks gezeichnet werden.

4.4 Kongruenz

SSS	Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie in der Länge ihrer drei Seiten übereinstimmen.	
SWS	Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und der Größe des von diesen eingeschlossenen Zwischenwinkels übereinstimmen.	
WSW	Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie in der Länge einer Seiten und den Größen der dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen,	
SsW	Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und der Größe des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen.	

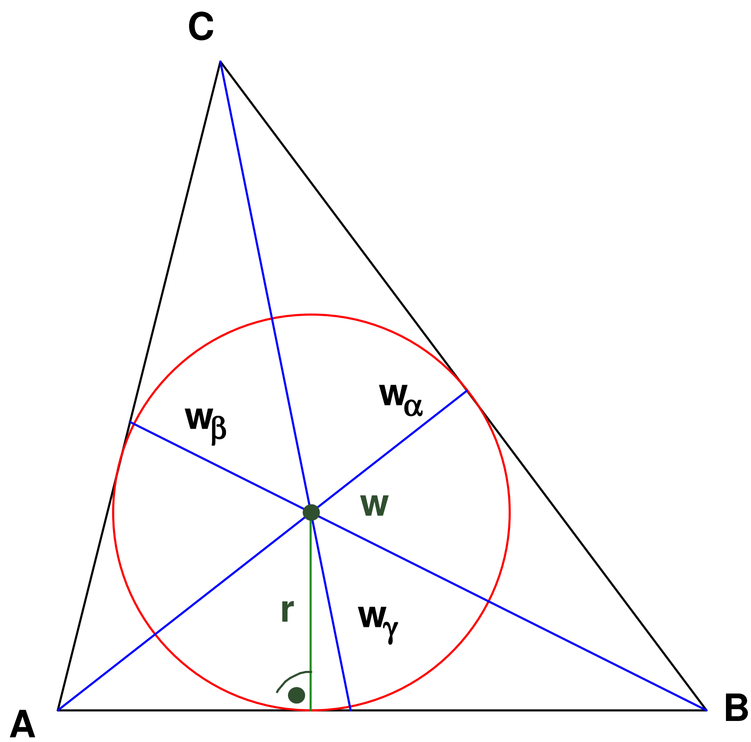
4.5 Besondere Linien im Dreieck



Die **Mittelsenkrechten** der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht.

Es ist der kleinste Kreis, der das Dreieck überdeckt.

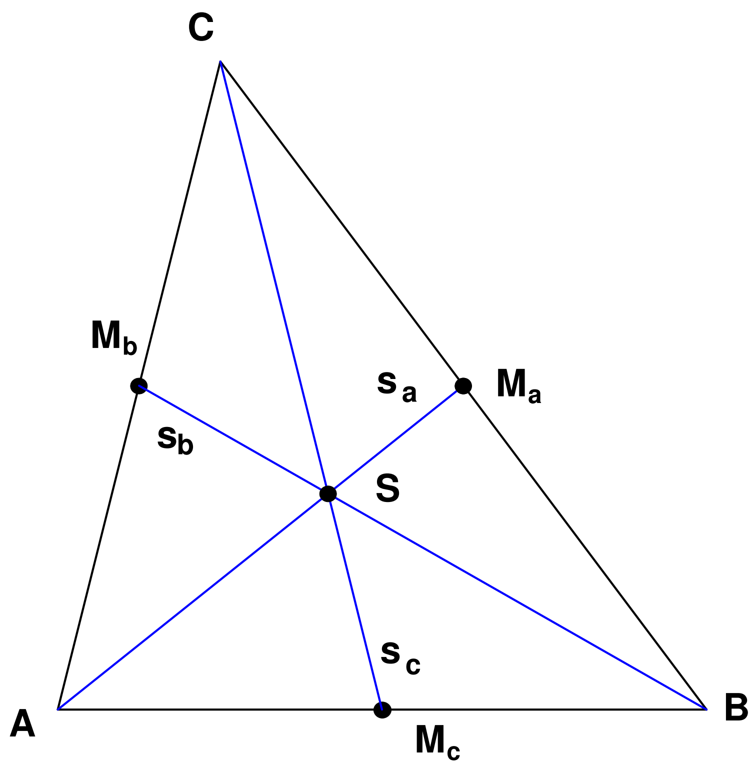
Man nennt diesen Kreis **Umkreis** des Dreiecks.



Die im Dreieck liegenden liegenden Teile der Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks heißen **Winkelhalbierende** des Dreiecks.

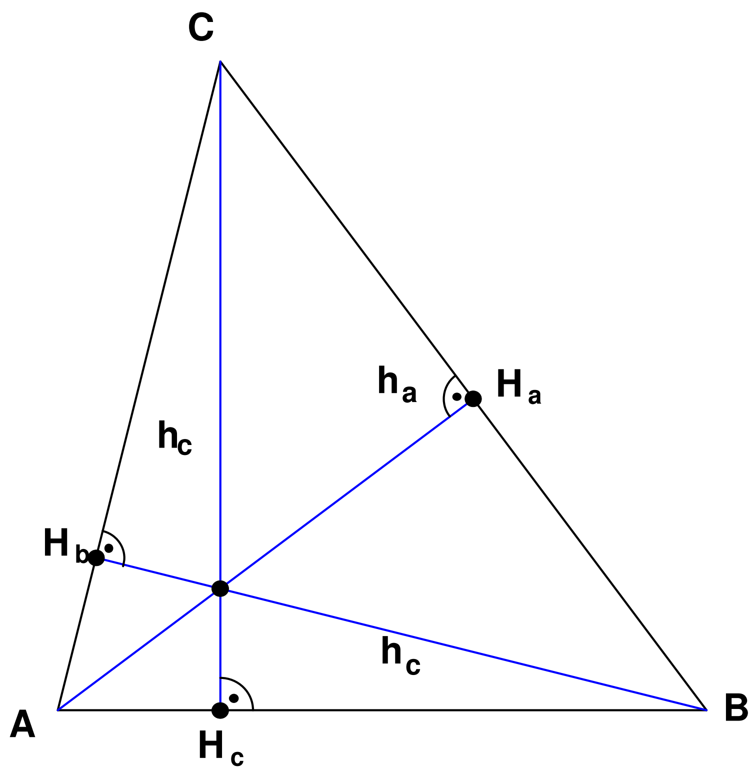
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W. W ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt.

Dieser Kreis heißt **Inkreis** des Dreiecks. Es ist der größte Kreis, der dem Dreieck einbeschrieben werden kann.



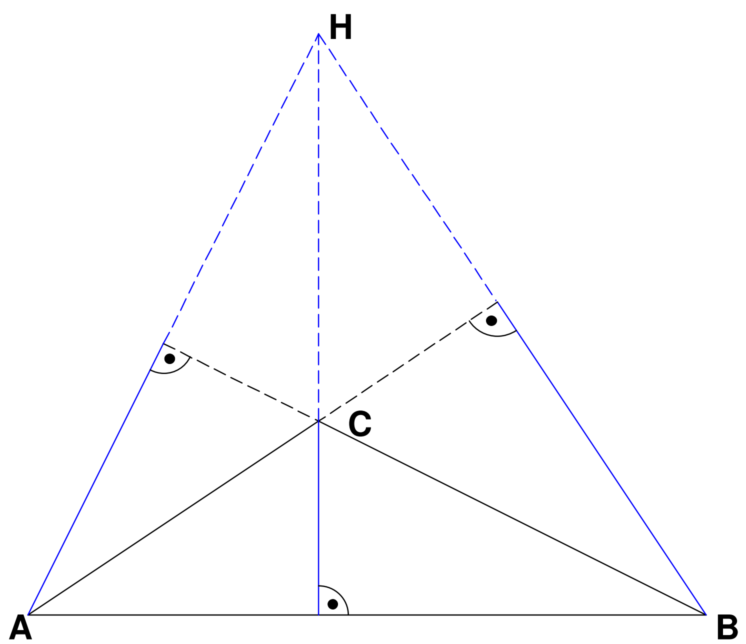
Eine Verbindungsstrecke zwischen einem Eckpunkt eines Dreiecks und dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite heißt **Seitenhalbierende** des Dreiecks.

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im **Schwerpunkt S** des Dreiecks.



Eine Lotstrecke von einem Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite bzw. deren Verlängerung heißt **Höhe** des Dreiecks.

Die drei Höhen eines Dreiecks bzw. deren Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt** H.



Höhenschnittpunkt eines stumpfwinkligen Dreiecks

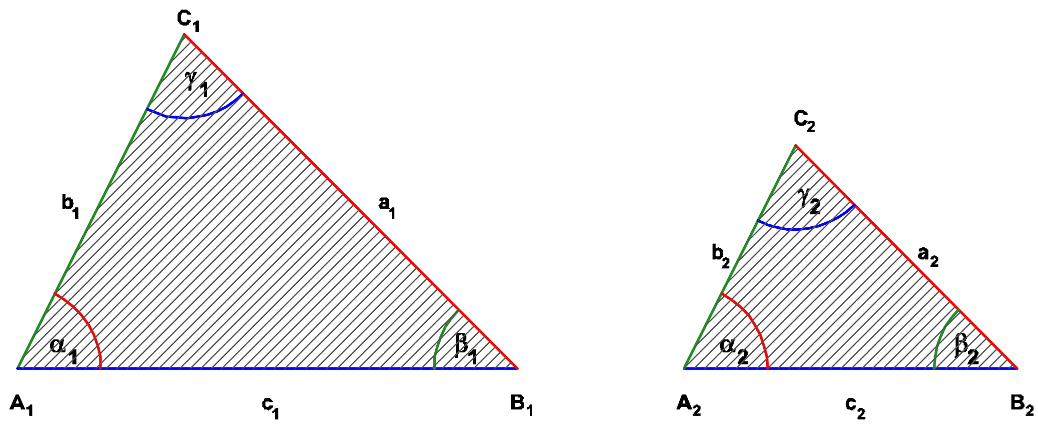
4.6 Der Kreis

Ein Kreis mit Radius r hat den Umfang $\boxed{U = 2\pi \cdot r}$ und den Flächeninhalt $\boxed{A = \pi \cdot r^2}$.

π ist die Kreiszahl.

$$\boxed{\pi = 3{,}141592.... \approx \frac{22}{7} \approx 3}$$

4.7 Ähnlichkeit



- Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn eine Figur maßstäbliche Vergrößerung oder die Verkleinerung der anderen ist.

  Sind zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ einander ähnlich, dann schreibt man

$$\boxed{\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2}$$

  mit dem Ähnlichkeitszeichen ~.

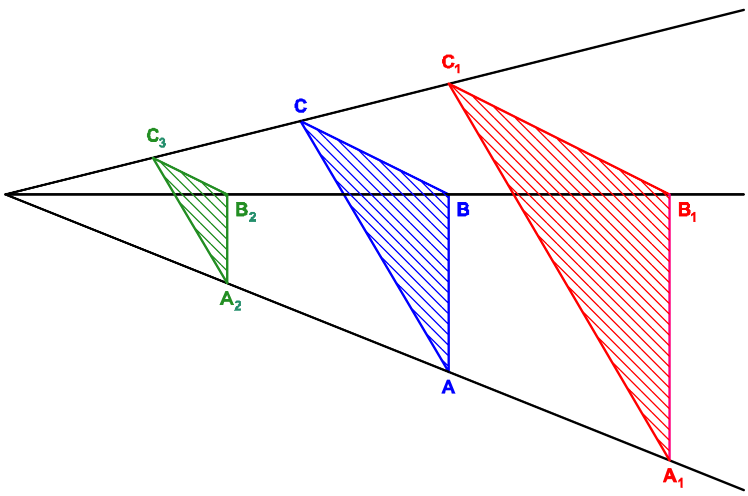
- Es gilt :

  Die Verhältnisse entsprechender Seiten ähnlicher Figuren sind gleich.

  Einander entsprechende Winkel ähnlicher Figuren sind gleich groß.

  Also gilt für einander ähnliche Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}} \text{ und } \boxed{\alpha_2 = \alpha_1 \;\; \beta_2 = \beta_2 \;\; \gamma_1 = \gamma_2}$$



Zwei Figuren heißen zueinander ähnlich, wenn sie kongruent sind oder eine Figur eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung der anderen ist.

Es gilt

1. Das Verhältnis entsprechender Seiten zweier ähnlicher Figuren ist gleich dem Maßstab

2. Einander entspechene Winkel sind gleich groß

Übungsaufgaben

----

1. Der Grundriss eines Gebäudes ist rechteckig mit den Maßen 40 m × 60 m.

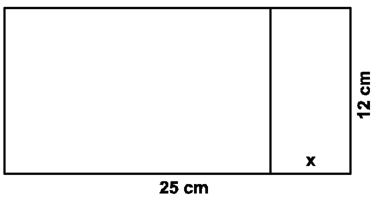
   Auf den Bauplänen hat der Grundriss den Umfang 100 cm.

   In welchem Maßstab ist der Grundriss gezeichnet ?

----

2. Das große Rechteck ist dem kleinsten Rechteck ähnlich.

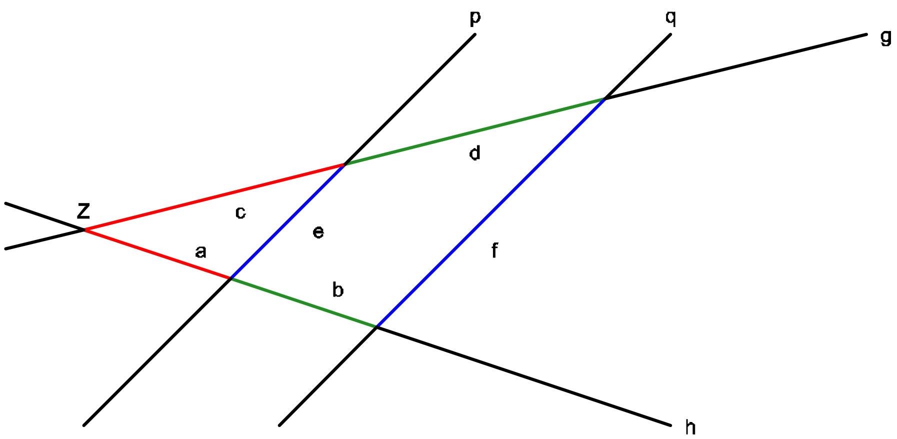
   Berechne x.



4.8 Strahlensatz

Werden zwei sich schneidene Geraden g und h von zwei parallelen Geraden p und q geschnitten, dann spricht man von einer Parallelenkreuzung.

V-Figur



Es gilt

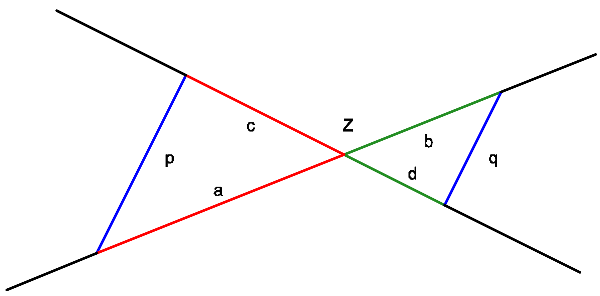
Das Verhältnis zweier Strecken auf der Kreuzungsgeraden g ist gleich dem Verhältnis entsprechender Strecken auf der Kreuzungsgeraden g. Also

$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ und $\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$ usw.

Das Verhältnis der Querstrecken auf den parallelenp und qlist gleich dem Abstand entsprechender Endpunkte dieser Strecken vom Keuzungspunkt Z. Also

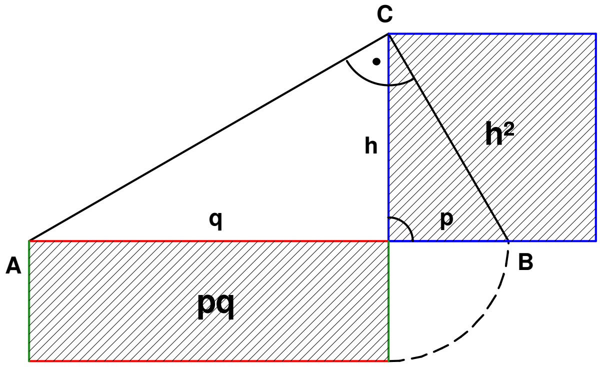
$$\boxed{\frac{e}{f} = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$$

X-Figur



$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ und $\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$ usw. und $\boxed{\frac{p}{q} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

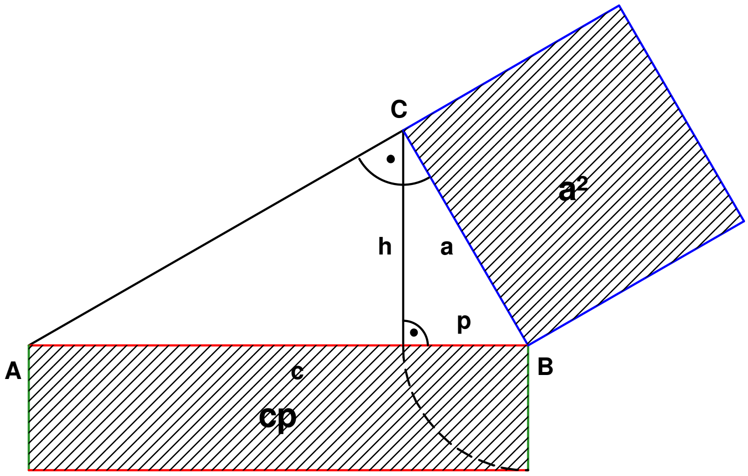
4.9 Die Satzgruppe des Pythagoras



Höhensatz :

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

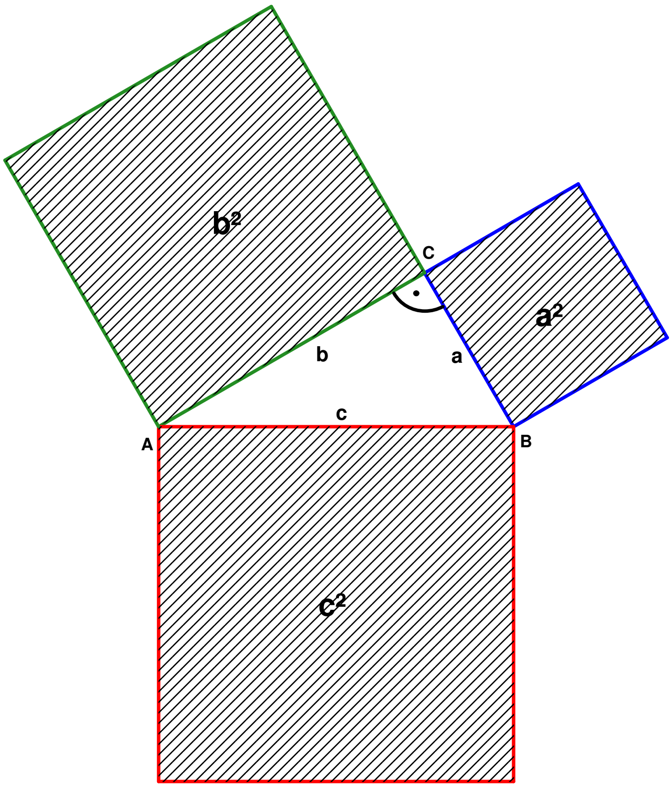
$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$



Kathensatz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck gebildet aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$\boxed{a^2 = c \cdot p} \text{ und } \boxed{b^2 = c \cdot q}$$



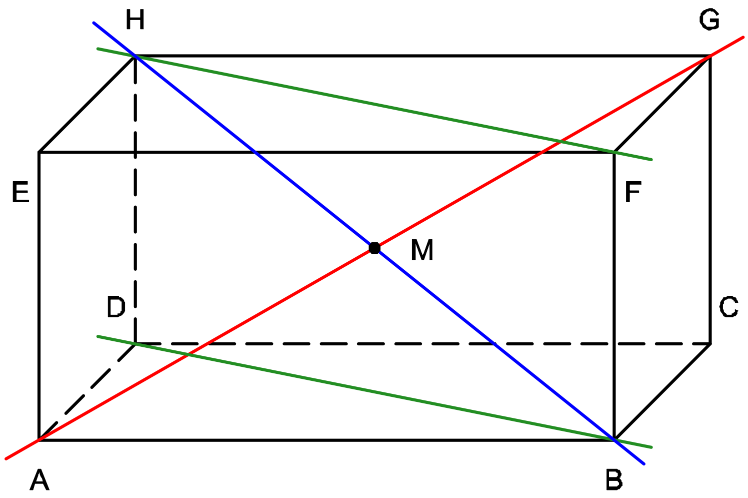
Satz des Pythagoras :

Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Quadrate über den Katheten.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

4.10 Raumgeometrie

4.10.1 Geraden und Ebenen im Raum



Durch zwei Punkte im Raum gibt es genau eine Gerade.

Drei Punkte im Raum, die nicht auf einer Geraden liegen, legen eine Ebene im Raum fest.

Zwei Geraden im Raum

a) sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden.

b) schneiden sich in einem Punkt, wenn sie in einer Ebene liegen und nicht parallel sind.

c) sind windschief zueinander, wenn sie in keiner gemeinsamen Ebene liegen und sich nicht schneiden.

Einer Gerade ist entweder parallel zu einer Ebene oder schneidet diese in einem Punkt.

Eine Gerade g steht senkrecht auf einer Ebene E, wenn sie die Ebene so in einem Punkt S schneidet, dass alle in E liegenden Geraden durch S auf g senkrecht stehen.

Schneidet eine Gerade g eine Ebene nicht senkrecht, dann heißt der Winkel zwischen g un ud ihrer senkrechten Projektion auf E, der Neigungswinkel von g gegen E.

Zwei Ebenen sind zueinander parallel oder schneiden sich in einer Geraden.

4.10.2 Prisma und Zylinder

Ein Prisma ist ein geometrischer Körper, der oben und unten von zwei senkrecht übereinander liegenden kongruenten Vielecken, der Grund- und der Deckfläche, und seitlich von gleich hohen Rechtecken begrenzt wird

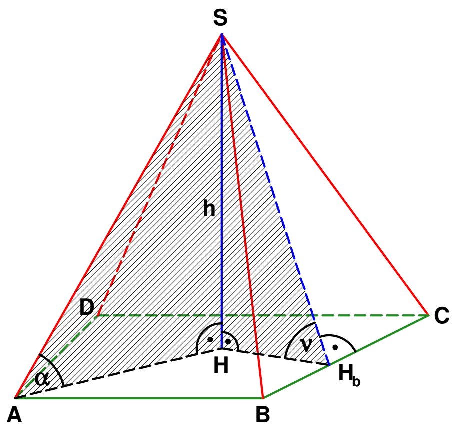
Ist U der Umfang der Grundfläche und G deren Inhalt sowie h die Höhe des Prismas, dann gilt für die Oberfläche und das Volumen des Prismas

$\boxed{O = 2 \cdot G + U \cdot h}$ sowie $\boxed{V = G \cdot h}$

Füe einen Zylinder ergibt sich dann als Grenzfall

$\boxed{O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h}$ sowie $\boxed{V = \pi r^2 \cdot h}$

4.10.3 Die Pyramide



Die Lotstrecke von der Spitze S auf die Grundfläche heißt **Höhe h** der Pyramide.

Der Winkel α im Stützdreieck ΔAHS ist der **Neigungswinkel der Seitenkante** [AS] gegen die Grundfläche.

Der Winkel ν im Stützdreieck ΔHH_1S ist der **Neigungswinkel der Seitenfläche** BCS gegen die Grundfläche.

Ist G der Inhalt der **Grundfläche** einer Pyramide und h die Länge der **Höhe**, dann gilt für das **Volumen** der Pyramide

$$\boxed{\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}}$$

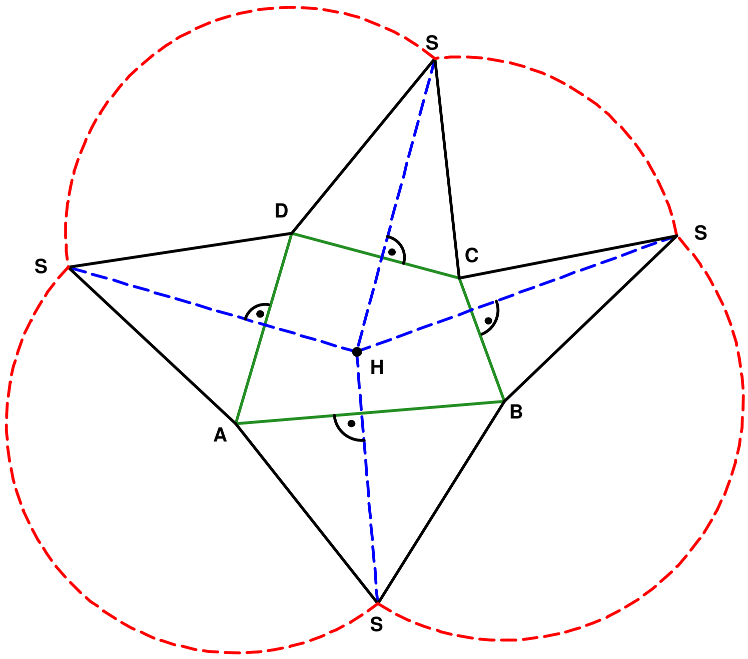
Spezielle Pyramiden

a) Eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche heißt ***Tetraeder***.

b) Ein Pyramide heißt **gerade**, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind. Die Grundfläche besitzt dann einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Höhenfußpunkt ist.

c) Eine gerade Pyramide mit einem regelmäßigen Vieleck als Grundfläche heißt ***regelmäßige Pyramide***.

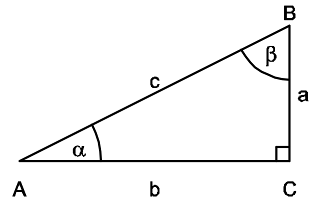
Ein regelmäßiges ***Tetraeder*** ist daher eine Pyramide, die von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, und damit einer der fünf ***Platonischen Körper***. Die vier anderen Platonischen Körper sind ***Würfel***, ***Oktaeder***, ***Dodekaeder*** und ***Ikosaeder***.



Im Netz der Pyramide schneiden sich die Lote von den Spitzen der Seitenflächen auf die jeweilige Grundkanten im Höhenfußpunkt der Pyramide.

4.11 Trigonometrie

Im rechtwinkligen Dreieck gilt



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}}$$

Sind also zwei Winkelgrößen oder Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck gegeben, dann lässt die zugehörige Größe unter Zuhilfenahme des Taschenrechner berechnen.

Spezielle Werte

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Ferner gilt:

$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$ und $\boxed{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}$ sowie $\boxed{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$

Testaufgaben

===

Aufgabe 1

Die Cheops-Pyramide ist eine gerade, ca. 147 m hohe Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit 230 m Seitenlänge

a) Wie viele Quadratmeter misst das Grundflächenquadrat?

☐ 920 m² ☐ 21600 m² ☐ 33800 m² ☐ 46000 m² ☐ 52900 m²

b) Wie hoch wäre ein Quader, der die gleiche Grundfläche und das gleiche Volumen wie die Cheops-Pyramide hat?

c) Bestimmen Sie zeichnerisch, wie viel Grad der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Cheops-Pyramide misst.

Maßstab: 10 m entsprechen 1 Kästchen

Aufgabe 2

a) Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, bei denen sich wahre Aussagen ergeben.

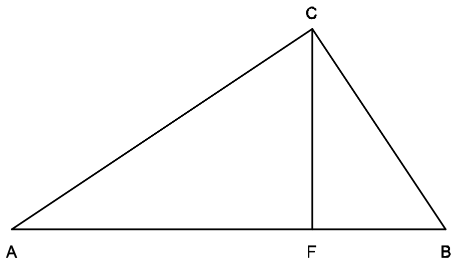
	punktsymmetrisch	achsensymmetrisch
Jedes Rechteck ist	☐	☐
Jedes Drachenviereck ist	☐	☐

b) Im Allgemeinen hat ein Trapez keine Symmetrieeigenschaft.

Wodurch ist dieser Vierecksstyp gekennzeichnet?

Aufgabe 3

Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist [CF] die Höhe auf die Hypotenuse [AB].



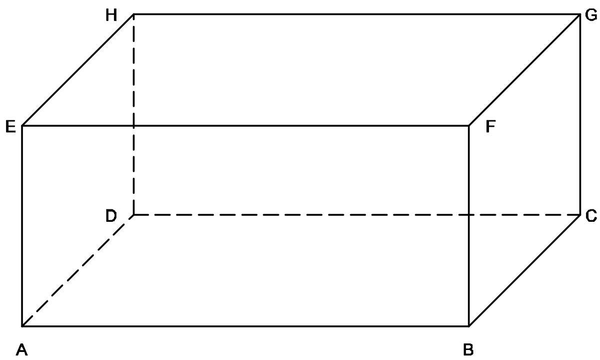
a) Begründen Sie, dass die Dreiecke AFC und ABC ähnlich sind.

b) Es sei $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ und $q = \overline{AF}$.

Leiten Sie aus der -hnlichkeit der Dreiecke AFC und ABC den Kathetensatz $b^2 = cq$ her.

Aufgabe 4

Der Quader ABCDEFGH hat die Kantenlängen $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm und $\overline{AE} = 10$ cm (Skizze nicht maßstabsgetreu).



a) Welche der Geraden AF, BG und BC steht auf der Geraden BE senkrecht?

☐ AF ☐ BG ☐ BC ☐ keine davon

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks EMNH.

c) E, M, F, H, N und G sind die Ecken eines Prismas.

Welchen Bruchteil des Quadervolumens nimmt dieses Prisma ein?

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{3}{4}$

Aufgabe 5

Auf einem Blatt Papier sind eine Gerade g und zwei Punkte P und Q gezeichnet, die nicht auf g liegen. Beschreiben Sie kurz eine Möglichkeit, wie Sie feststellen können, ob die Punkte P und Q bezüglich g im Rahmen der Zeichengenauigkeit zueinander symmetrisch sind.

Aufgabe 6

Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist γ der Winkel an der Spitze.

Die Werte von γ liegen im Intervall $]0°; 180°[$.

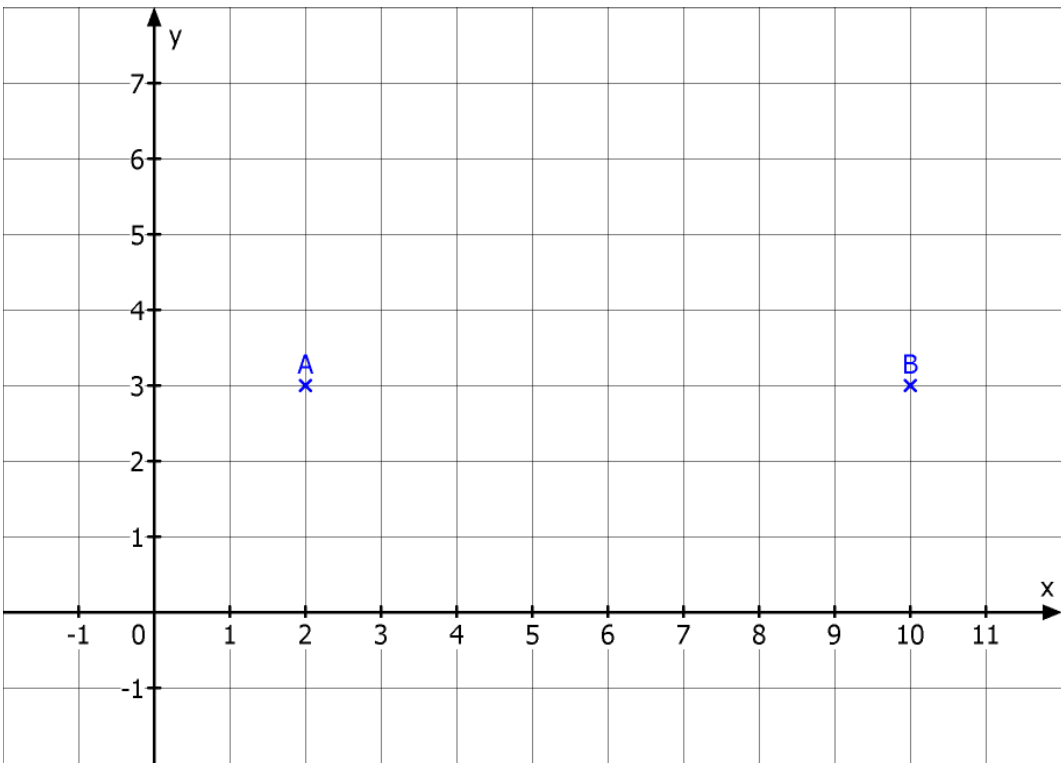
a) Wie groß ist der stumpfe Winkel μ, unter dem sich die beiden Mittelsenkrechten der Schenkel des Dreiecks ABC für $\gamma = 40°$ schneiden?

Fertigen Sie eine Skizze an, in der die geometrische Situation deutlich wird.

b) Für welche Werte von γ liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Schenkel außerhalb des Dreiecks ABC?

Aufgabe 7

Im Koordinatensystem (Einheit 1 cm) sind die Punkte $A(2 \mid 3)$, $B(10 \mid 3)$ und ein weiterer Punkt C gegeben.



Der Punkt C' entsteht durch Punktspiegelung von C am Mittelpunkt M der Strecke [AB].

a) Zeichnen Sie für $C\left(5 \mid 5\right)$ den Punkt C' in das Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den genauen Flächeninhalt des Vierecks AC'BC für $C\left(5 \mid 5\right)$.

c) Wo muss bei festem A und B der Punkt C liegen, damit A, B und C zusammen mit dem Spiegelpunkt C' von C eine Raute bilden?

Beschreiben Sie alle Möglichkeiten für die Lage von C.

Aufgabe 8

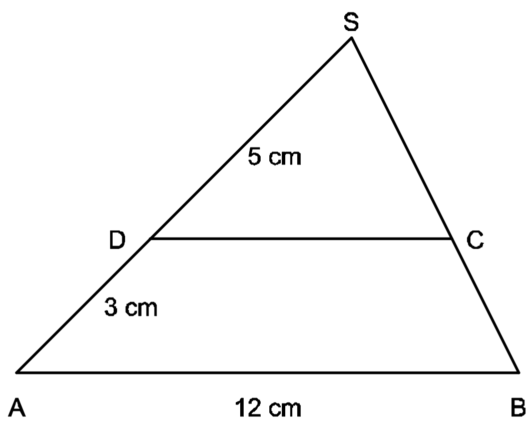
Auf die Frage "Was besagt der Satz des Pythagoras?" antwortet Peter "$a^2 + b^2 = c^2$"

"Naja, das ist so eine Kurzform," sagt der Lehrer, "aber was bedeutet das denn eigentlich?"

Formulieren Sie eine Erklärung, die Peters Lehrer zufrieden stellen würde.

Aufgabe 9

Gegeben ist ein Trapez ABCD, dessen Schenkel sich im Punkt S schneiden.
In der nicht maßstabsgetreuen Skizze sind die gegebenen Streckenlängen eingetragen



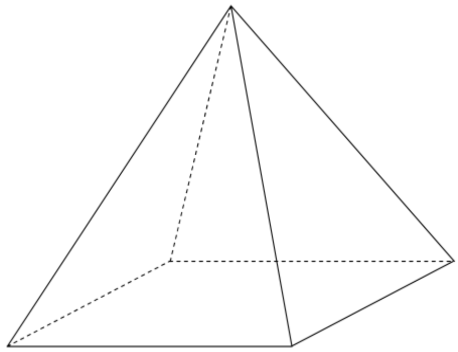
a) Wie groß ist das Verhältnis $\overline{BC} : \overline{CS}$?

☐ 3 : 8 ☐ 8 : 3 ☐ 3 : 5 ☐ 5 : 3 ☐ 12 : 5

b) Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$.

Aufgabe 10

Eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge g hat die Höhe h.



a) Lösen Sie die Formel $V = \frac{1}{3}g^2h$ für das Volumen der Pyramide nach der Seitenlänge g auf.

b) Wie groß ist der Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, wenn die Höhe h halb so lang wie die Diagonale des Grundflächenquadrats ist?

c) Die Pyramide wird nun von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand $\frac{h}{2}$ hat.

d) Welcher Bruchteil des Inhalts der Grundfläche ist der Inhalt der Schnittfläche?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

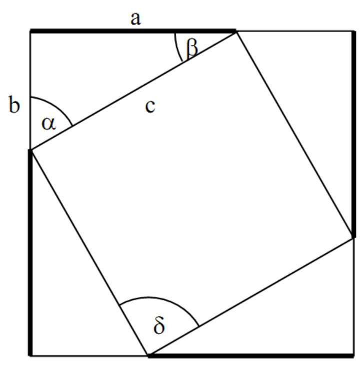
e) Welcher Bruchteil des Pyramidenvolumens ist das Volumen der abgeschnittenen kleinen Pyramide?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{8}$

Aufgabe 11

Gegeben sind vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c,.

Damit wird die nebenstehende Figur so gezeichnet, dass ein Quadrat mit der Seitenlän $a + b$ entsteht.



a) Warum ergeben die den Katheten a und b gegenüberliegenden Winkel α und β zusammen 90°?

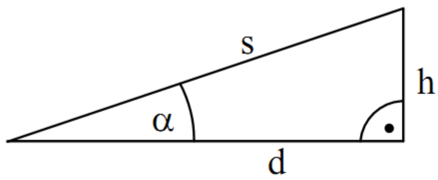
b) Das innere Viereck hat vier gleich lange Seiten. Begründen Sie, dass es ein Quadrat ist, indem Sie durch eine Winkelbetrachtung nachweisen: $\delta = 90°$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des äußeren Quadrats auf zwei verschiedene Arten und folgern Sie daraus den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 12

a) Nebenstehende Skizze zeigt ein Steigungsdreieck mit der Steigung $\frac{h}{d}$ und dem Neigungswinkel α.

Markieren Sie die richtige Beziehung für dieses Dreieck



☐ $\tan\alpha = \frac{d}{s}$ ☐ $\tan\alpha = \frac{h}{s}$ ☐ $\tan\alpha = \frac{h}{d}$

☐ $\tan\alpha = \frac{d}{h}$ ☐ $\tan\alpha = \frac{s}{d}$ ☐ $\tan\alpha = \frac{s}{h}$

Im unteren Teil hat die Straße von Berchtesgaden zum Rossfeld eine Steigung von 25 %.

b) Zeigen Sie, dass die Steigung von 25 % im abgebildeten Verkehrsschild nicht richtig dargestellt ist.

Messen Sie dazu geeignete Strecken in einem Steigungsdreieck. Machen Sie im Bild kenntlich, welche Strecken Sie abgemessen haben.

c) Welcher der folgenden Terme gibt an, wie viele Meter man auf der unteren Rossfeldstraße zurücklegen müsste, um einen Höhenunterschied von 100 m zu erzielen?

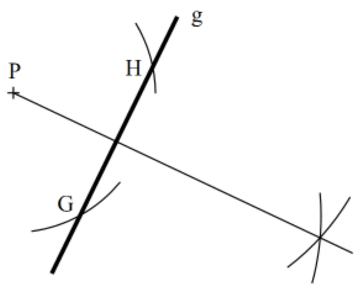
☐ $4 \cdot 100$ m ☐ $0{,}15 \cdot 100$ m ☐ $\sqrt{400^2 \cdot 100^2}$ m

☐ $\sqrt{400^2 + 100^2}$ m ☐ $\sqrt{400^2 - 100^2}$ m

Aufgabe 13

Von einem Punkt P aus soll das Lot auf eine Gerade g gefällt werden. Nebenstehende Abbildung zeigt eine mögliche Konstruktion.

Erklären Sie in Worten, wie dabei vorgegangen wurde.



Aufgabe 14

Ein gerader Kreiszylinder hat die Höhe h und den Radius r.

a) Erklären Sie, wie man die Formel $M = 2\pi rh$ für den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders herleiten kann

b) Für den Inhalt O der Oberfläche des Zylinders gilt demnach: $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Lösen Sie diese Formel nach der Höhe h auf.

Aufgabe 15

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über Vierecke jeweils wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.	☐	☐
In jedem Parallelogramm stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.	☐	☐
In jedem achsensymmetrischen Trapez stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.		
In jedem achsensymmetrischen Trapez halbieren die Diagonalen einander.		

Aufgabe 16

a) Lea betrachtet den Vollmond. Mit einer kleinen Kunststoffperle, die sie 50 cm vor ihr Auge hält, kann sie den Mond genau abdecken. Lea weiß, dass die Perle einen Durchmesser von 5 mm hat und dass der Monddurchmesser 3500 km beträgt. Berechnen Sie aus diesen Angaben, wie weit der Mond etwa von der Erdoberfläche entfernt ist. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.

b) In einem einfachen Modell bewegt sich der Mond mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit dem Radius 384000 km um die Erde.

Für einen Umlauf um die Erde benötigt der Mond 27 Tage. Kreuzen Sie den Zahlenterm an mit dem sich die Bahngeschwindigkeit des Mondes in km/h berechnen lässt.

☐ $\frac{27\cdot 24}{\pi\cdot 384000}$ ☐ $\frac{\pi\cdot 384000^2\cdot 27}{24}$ ☐ $\frac{2\pi\cdot 192000}{27\cdot 24}$

☐ $\frac{2\pi\cdot 384000}{27\cdot 24\cdot 3600}$ ☐ $\frac{2\pi\cdot 384000}{27\cdot 24}$ $\frac{27\cdot 24}{2\pi\cdot 192000^2}$

Aufgabe 17

a) Es gilt $6^2 = (\sqrt{11})^2 + 5^2$( ) 2 2 2

Verwenden Sie diese Gleichung, um mit Hilfe des Satzes von Pythagoras eine Strecke der Länge 11 cm zu konstruieren. Markieren Sie diese Strecke in der Zeichnung.

b) Vereinfachen Sie den Term $(n+1)^2 - n^2$ und beschreiben Sie, wie sich damit jede Strecke, deren Längenmaßzahl die Wurzel aus einer ungeraden Zahl größer 1 ist, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras konstruieren lässt.

Aufgabe 18

Die abgebildete etwa 4 t schwere Blechrolle hat einen Außendurchmesser von etwa 1 m. Lea und Max messen einige weitere Längen ab und stellen damit jeweils einen Ansatz zur näherungsweisen Berechnung des Volumens des aufgerollten Blechs auf:

$$V_{Lea} = 0{,}5^2\cdot\pi\cdot 1{,}8\ m^3 - 0{,}4^2\cdot\pi\cdot 1{,}8\ m^3$$

$$V_{Max} = (2\pi\cdot 0{,}5)\cdot 1{,}8\cdot 0{,}1\ m^3$$

Erklären Sie die Ansätze der beiden. Geben Sie dazu auch an, von welchen geometrischen Körpern ausgegangen wurde.

Aufgabe 19

a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Zirkel und Lineal.

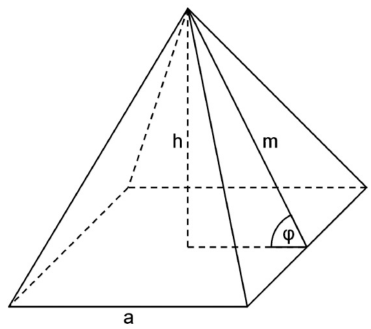
b) Zeigen Sie:

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a hat die Länge $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Aussage aus Teilaufgabe b) den exakten Wert von cos30°.

Aufgabe 20

Die Abbildung zeigt eine Pyramide der Höhe h. Die quadratische Grundfläche hat die Seitenlänge a, jedes Seitendreieck die Höhe m.



Ergänzen Sie die Gleichung h = ________________________ durch einen Term, mit dem h

aus a und m berechnet werden kann.

Mit welchen der folgenden Gleichungen lässt sich der Neigungswinkel φ einer Seitenfläche gegen die Grundfläche berechnen? Kreuzen Sie an.

☐ $\tan\varphi =$ ☐ $\tan\varphi =$ ☐ $\sin\varphi =$ ☐ $\sin\varphi =$ ☐ $\sin\varphi =$

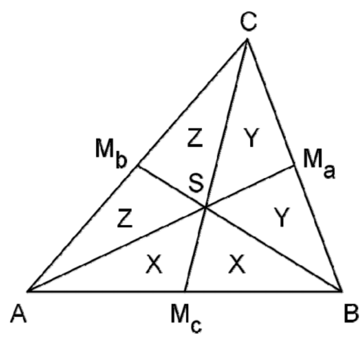
Aufgabe 21

Auf einem Spielfeld, das 100m lang und 75m breit ist, findet ein Fußballspiel statt. Ein Spieler passt den Ball zu einem Mitspieler; dabei ist der Ball zwei Sekunden unterwegs. Schätzen Sie den Anteil der Spielfeldfläche ab, den die zehn Feldspieler der gegnerischen Mannschaft in dieser Zeit höchstens abdecken können. Gehen Sie dazu davon aus, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit der Spieler, während der Ball unterwegs ist, $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt.

Erläutern Sie Ihr Vorgehen

Aufgabe 22

Im Dreieck ABC sind M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten (vgl. Abbildung). Die Verbindungsstrecken dieser Mittelpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten schneiden sich im Punkt S.



a) Die Dreiecke AM_cS und M_cBS haben den gleichen Flächeninhalt, da sie in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Tragen Sie diese Strecken deutlich sichtbar in die Abbildung ein.

b) Analog zu Aufgabe a) kann man zeigen, dass zwei weitere Paare von Dreiecken mit gemeinsamen Eckpunkt S jeweils den gleichen Flächeninhalt haben.

Die übereinstimmenden Inhalte sind mit X, Y und Z bezeichnet (vgl. Abbildung).

Begründen Sie, dass die Aussagen $2Z + X = 2Y + X$ sowie $2Z + Y = 2X + Y$ wahr sind, und folgern Sie daraus, dass $X = Y = Z$ gilt.