**Übungen**

==========================================================================

1. Gib die Wachstumsrate p% oder den Wachstumsfaktor q an.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wachstumsrate p% | 15% | −7% | 2,5% | | | |
| Wachstumsfaktor q | | | | 1,05 | 0,80 | 0,97 |

---

2. Innerhalb von 7 Jahren hat sich in einem Waldgebiet die Anzahl der Kaninchen durch exponentielles Wachstum verdoppelt.

   a) Mit welchem Faktor erfolgt das Wachstum jährlich?

   b) Gib die jährliche Zunahme in Prozent an.

---

3. Im Jahre 2000 lebten in Ungarn ca. 10 Millionen Menschen. Ungarn ist eines der wenigen Länder mit einer Abnahme seiner Bevölkerung, jährlich um 0,5%.

   Wenn das so bleibt, in wie vielen Jahren werden es erstmals weniger als 9 Millionen sein ?

---

4. Ein radioaktives Präparat zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 8,3 % abnimmt.

   a) Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Anfangsmenge vorhanden ?

   b) Berechne die Halbwertszeit des Präparats.

---

5. 1986 wurde beim Reaktorunfall in Tschernobyl unter anderem Strontium 90 mit 28,8 Jahren Halbwertszeit freigesetzt.

   a) Bestimme den jährlichen Zerfallsfaktor.

   b) Welcher Bruchteil der Anfangsmenge war 1996 noch vorhanden ?

---

6. Bestimme die Lösungen

a) $2^{3x} = 5$ b) $2^{3x-2} = 7$ c) $2^{2x-2} = 5^{x-1}$

d) $\frac{1}{3^x} = 4$ e) $20^{\frac{1}{x}} = 5$ f) $3^{x-1} \cdot 2^{2x} = 5^{3x+1}$

---

7. Bestimme die Lösungen

a) $2^{x-1} \cdot 5^{2x-1} = 3^{1-x}$ b) $5^x + 6^x = 6^{x+1}$ c) $2^{x+1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^x$

d) $4^{x-1} - 9^x = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$ e) $2^2 \cdot 5^x - 2^{2x} = 2^{2x+2}$ f) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$

---

8. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$

a) $\log\left(x-5\right) = -2$

b) $\log\left(3x-2\right) = 1$

c) $\log\left(2x\right) + \log 4 = 3$

d) $\log\left(7x+9\right) - \log x = 1$

e) $2\log x - \log\left(4x-3\right) = 2$

f) $\log x + \log\left(x+2\right) - \log 3 = 0$

---

9. Berechnen erechnen Sie exakt, ohne die Winkel mit dem Taschenrechner zu bestimmen, die fehlenden Funktionswerte sinx, cosx, tanx $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ aus:

i) $\cos x = 0{,}8$ ii) $\sin x = \frac{12}{13}$ iii) $\tan x = 0{,}5$

---

10. Bestimmen Sie die Lösungen $\left(0 \le x \le 2\pi\right)$

a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

b) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

c) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

d) $\cos x - \sin x = 1$

---

11. Vereinfache

a) $\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \tan^2 x$

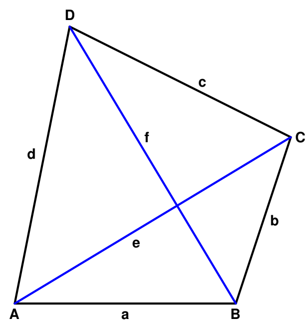
b) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

c) $\frac{1}{1 - \sin x} - \frac{\tan x}{\cos x}$

d) $\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}$

---

12. Bei den folgenden drei Vierecken sind die fehlenden Seiten, Diagonalen und Winkel zu berechnen:




a) $a = 8{,}14$, $e = 8{,}43$, $\alpha = 75°$, $\beta = 67{,}5°$ und $\gamma = 108{,}7°$.

b) $a = 47{,}1$, $b = 52{,}3$, $\alpha = 117{,}8°$, $\beta = 85{,}2°$ und $\gamma = 98{,}5°$.

c) $a = 8{,}4$, $d = 3{,}7$, $e = 6{,}8$ $\alpha = 125°$ und $\measuredangle\left(b, e\right) = 58°$.

**Lösungen**

==========================================================

1.

| Wachstumsrate p% | 15% | $-7\%$ | 2,5% | **5%** | **$-20\%$** | **$-3\%$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wachstumsfaktor q | **1,15** | **0,93** | **1.025** | 1,05 | 0,80 | 0,97 |

---

2. a) Ansatz : $K(x) = K_0 \cdot a^x$

$$\text{Bedingung} : K(7) = 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot a^7 \quad \Rightarrow \quad a^7 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[7]{2} \approx 1{,}10$$

b) Die jährliche Zunahme beträgt 10%

---

3. Ansatz : $K(x) = K_0 \cdot a^x = 10^7 \cdot 0{,}995^x$

$$\text{Gleichung} : 9 \cdot 10^6 = 10^7 \cdot 0{,}995^x \quad \Rightarrow \quad 0{,}995^x = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log 0{,}9}{\log 0{,}995} \approx 21$$

---

4. a) Ansatz : $K(x) = K_0 \cdot a^x = K_0 \cdot 0{,}917^x$

$$\text{Gleichung} : 0{,}1 \cdot K_0 = K_0 \cdot 0{,}9^x \quad \Rightarrow \quad 0{,}917^x = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}917} \approx 26{,}6$$

b) $K(x) = 0{,}5 K_0 \cdot a^x = K_0 \cdot 0{,}917^x \quad \Rightarrow \quad 0{,}917^x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}917} \approx 8$

---

5. a) Ansatz : $K(x) = K_0 \cdot a^x$

$$\text{Gleichung} : 0{,}5 \cdot K_0 = K_0 \cdot a^{28{,}8} \quad \Rightarrow \quad a^{28{,}8} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}5^{\frac{10}{288}} \approx 0{,}976$$

b) $K(10) = K_0 \cdot 0.976^{10} \approx 0{,}78 K_0$

---

6. a) $2^{3x} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 5}{3 \cdot \log 2}$

b) $2^{3x-2} = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\frac{\log 7}{\log 2} + 2}{3}$

c) $2^{2x-2} = 5^{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = 1$

d) $\dfrac{1}{3^x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{\log 4}{\log 3}$

e) $20^{\frac{1}{x}} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 20}{\log 5}$

f) $3^{x-1} \cdot 2^{2x} = 5^{3x+1} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 15}{\log \frac{125}{12}}$

---

7. Bestimme die Lösungen

a) $2^{x-1}\cdot 5^{2x-1} = 3^{1-x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 30}{\log 150}$

b) $5^x + 6^x = 6^{x+1} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 5}{\log 6}$

c) $2^{x+1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^x \quad \Rightarrow \quad x = 2$

d) $4^{x-1} - 9^x = 3^{2x-1} - 2^{2x+1} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log \frac{27}{16}}{2\log \frac{3}{2}}$

e) $2^2\cdot 5^x - 2^{2x} = 2^{2x+2} \quad \Rightarrow \quad x = 1$ f) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 3}{4\cdot\log 2}$

---

8. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$

a) $\log(x-5) = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 5{,}01$ b) $\log(3x-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

c) $\log(2x) + \log 4 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 125$ d) $\log(7x+9) - \log x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

e) $2\log x - \log(4x-3) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 200 - 10\sqrt{397} \vee x = 200 + 10\sqrt{397}$

f) $\log x + \log(x+2) - \log 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

---

9. i) $\cos x = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \dfrac{3}{4}$

ii) $\sin x = \dfrac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \dfrac{12}{5}$

iii) $\tan x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

---

10. a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

Substitution : $u := \cos x$

$2u^2 - 7u + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{1}{2} \vee u = 3$

Resubstitution : $\cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{3} \vee x = \dfrac{5\pi}{3}$

b) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 - 3\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$

c) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot \sin x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot \sin x = 1 - \cos^2 x$

$\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \left(\cos x - \sin x\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = 0 \vee \left(\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1\right)$

Einsetzen ergibt nur die Lösungen $x = 0 \vee x = \pi \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5}{4}\pi$

d) $\cos x - \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \sin^2 x} - \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 + \sin x$

$\Rightarrow \quad 1 - \sin^2 x = (1 + \sin x)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \sin x = 1 + \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0$

$x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

---

11. Vereinfache

a) $\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \tan^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

b) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) =$

$= 2\cos^2 x - 1$

c) $\frac{1}{1 - \sin x} - \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\cos x - \tan x \cdot (1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cdot \cos x} = \frac{\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cdot \cos x} =$

$= \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1 - \sin x) \cdot \cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x) \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

d) $\dfrac{1}{1\ +\ \sin x}\ +\ \dfrac{1}{1\ -\ \sin x}\ =\ \dfrac{1-\sin x+1+\sin x}{(1+\sin x)\cdot(1-\sin x)}\ =\ \dfrac{2}{1-\sin^2 x}\ =\ \dfrac{2}{\cos^2 x}$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

12.

| | a | b | c | d | α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 8,14 | 6,92 | 3,85 | 6,36 | 75° | 67,5° | 108,7° | 108,8° |
| b) | 47,1 | 52,3 | 72,83 | 64,23 | 117,8° | 85,2° | 98,5° | 58,5° |
| c) | 8,4 | 9,71 | 5,02 | 3,7 | 125° | 43,35° | 90,25° | 101,4° |