Übungsblatt

===

1. Im Jahr 1968 betrug der gesetzliche Mindestlohn in den USA 1,60 \$, im Jahr 1976 waren es 2,30 \$.

   a) Bestimmen Sie unter der Annahme einer exponentielle Zunahme den Funktionsterm w(t) für den Mindestlohn, wenn t die Anzahl der Jahre nach 1960 ist.

   b) Wie hoch war demnach der Mindestlohn nach diesem Modell im Jahre 1960 ?

   c) Im Jahr 1996 betrug der Mindestlohn 5,15 \$.

   Vergleichen Sie mit dem Wert für den Mindestlohn, der sich aus dem Modell ergibt.

Lösung :

a) Ansatz : $w(t) = w_0 \cdot a^t$

$w(8) = 1{,}60\ \$ = w_0 \cdot a^8$ und $w(16) = 2{,}30\ \$ = w_0 \cdot a^{16}$

Beidseitige Division der beiden Gleichungen :

$$\frac{2{,}3}{1{,}6} = a^8 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[8]{\frac{23}{16}} = 1{,}0464$$

Eingesetzt ergibt sich : $w_0 = 1{,}11\ \$$

b) Der Mindestlohn betrug 1,11 \$

c) $w(36) = 1{,}11 \cdot 1{,}0464^{36} = 5{,}68$

---

2. Die Ortschaft Hausen verzeichnet einen enormen Zuwachs der Bevölkerung. Im Jahr 1990 betrug die Einwohnerzahl 860 und fünf Jahr später lag sie bei 1210.

   a) Bestimme ein lineare Funktion

   $f_1 : x \rightarrow y = mx + t$

   bzw. eine Exponentialfunktion $f : x \rightarrow y = c \cdot a^x$, deren Funktionswerte die Einwohnerzahl im Jahr $1990 + x$ angibt.

   b) Welche Bevölkerungszahl sagt das lineare Modell bzw. das exponentielle Modell für die Anzahl der Einwohner im Jahr 2000 voraus ?

   c) Ermitteln Sie graphisch, ab welchem Zeitpunkt das exponentielle Modell eine größere Einwohnerzahl als das lineare Modell vorhersagt ?

Lösung :

a) $x = 0$ eingesetzt ergibt : $860 = m \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 860$

$x = 5$ eingesetzt ergibt : $1210 = m \cdot 5 + 860 \quad \Rightarrow \quad m = 70$

Lineares Modell : $y = 70 \cdot x + 860$

$x = 0$ eingesetzt ergibt : $860 = c \cdot a^0 \quad \Rightarrow \quad c = 860$

$x = 5$ eingesetzt ergibt : $1210 = 860 \cdot a^5 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{\frac{1210}{860}} \approx 1{,}07$

Exponentielles Modell : $y = 860 \cdot 1{,}07^x$

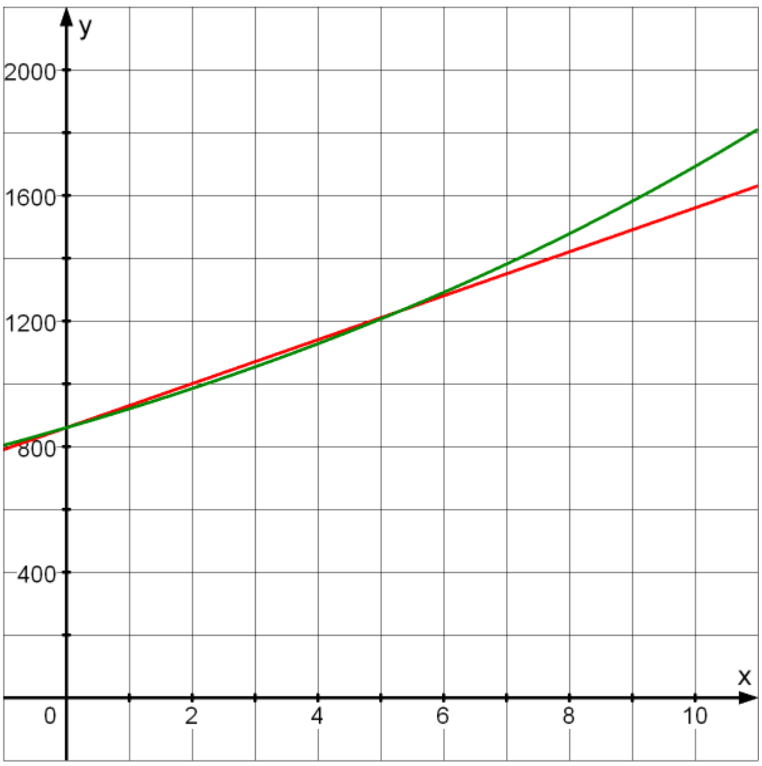
b) $x = 10$ ergibt für das lineare Modell eine Bevölkerungszahl im Jahr 2000 von

$10 \cdot 70 + 860 = 1560$

$x = 10$ ergibt für das lineare Modell eine Bevölkerungszahl im Jahr 2000 von

$860 \cdot 1{,}07^{10} \approx 1681$

c)



Nach ca. 5,5 Jahren sagt des exponentielle Modell mehr Einwohner als das lineare voraus.

3. a) Um wie viel % nimmt der Wert eines Autos jährlich ab, wenn sein Wert nach 4 Jahren auf einen Viertel des Neuwerts abgesunken ist ?

b) Um wie viel % nimmt der Energieverbrauch einer Stadt jährlich zu, wenn sich der Verbrauch innerhalb von 30 Jahren verdreifacht ?

Lösung :

a) $p(t) = p_0 \cdot a^t$

Bedingung : $\frac{3}{4}p_0 = p_0 \cdot a^4 \quad \Rightarrow \quad a^4 = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[4]{0{,}75} \approx 0{,}93$

Der Wert des Autos nimmt pro Jahr um 0,07 = 7% ab.

b) $e(t) = e_0 \cdot a^t$

Bedingung : $3p_0 = e_0 \cdot a^{30} \quad \Rightarrow \quad a^{30} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[30]{3} \approx 1{,}037$

Der Energieverbrauch nimmt pro Jahr um 3,7% zu.

---

4. Schätzungen zufolge erhöht sich die CO_2-Konzentration der Atmosphäre jährlich um 0,4%. Um wie viel % ist die CO_2-Konzentration im Jahre 2030 höher als heute, 2005, unter der Annahme, dass sich die Zuwachsrate nicht mehr ändert ?

---

4. $k(t) = k_0 \cdot a^t$ mit $a = 1{,}004$

$k(25) = k_0 \cdot 1{,}004^{25} \approx 1{,}10 \cdot k_0$

Die Konzentration liegt um 10% höher.

---

5. Berechne bzw. vereinfache

a) $\log_a \frac{1}{a^3} = -3$ b) $\log_{a^3} a = \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{a^3}} a = -\frac{1}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{a}} a^3 = -3$ e) $\log_{a^3} \frac{1}{a} = -\frac{1}{3}$

f) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ g) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a}$ h) $\log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$ i) $\log_a \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3}$

---

6. Vereinfache soweit wie möglich

a) $\frac{1}{4}\cdot\log(a^{4n}) - (n+3)\cdot\log(a) = \log\frac{\left(a^{4n}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{n+3}} = \log\frac{a^n}{a^{n+3}} = \log a^{-3} = -3\log a$

b) $10^{3\cdot\log 2 - 2\cdot\log 3} = 10^{\log 2^3 - \log 3^2} = 10^{\log\frac{8}{9}} = \frac{8}{9}$

---

7. Bestimme x !

a) $\log_x 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

b) $\log_2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\log_2(2x + \frac{1}{2}) = -2 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2} = 2^{-2} \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$

---

8. Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$.

a) $2^{5x} = 8\cdot 4^{x-1} \Rightarrow 2^{5x} = 2^3\cdot 2^{2x-2} \Rightarrow 2^{5x} = 2^{2x+1} \Rightarrow 5x = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $5^{x+1} = 2^x\cdot 7^{2x} \Rightarrow \log 5^{x+1} = \log\left(2^x\cdot 7^{2x}\right) \Rightarrow (x+1)\cdot\log 5 = \log 2^x + \log 7^{2x}$

$\Rightarrow (x+1)\cdot\log 5 = x\cdot\log 2 + 2x\cdot\log 7 \Rightarrow \log 5 = x\cdot\log 2 + 2x\cdot\log 7 - x\cdot\log 5$

$x\cdot\left(\log 2 + 2\cdot\log 7 - \log 5\right) = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2 + 2\cdot\log 7 - \log 5} = \frac{\log 5}{\log\frac{98}{5}}$

c) $3^{2x+3} - 9^{x+2} - \left(\sqrt{3}\right)^{2x+10} = 243 \Rightarrow 3^{2x+3} - 3^{2x+4} - 3^{x+5} = 243$

$27\cdot 3^{2x} - 81\cdot 3^{2x} - 9\cdot 3^x = 243 \Rightarrow -2\cdot 3^{2x} - 9\cdot 3^x = 9$

Substitution : $u = 3^x$

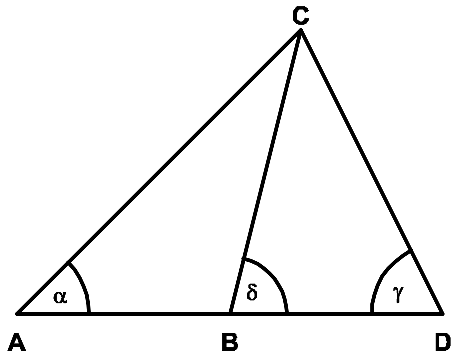
$-2u^2 - 9u - 9 = 0 \Rightarrow u = -\frac{3}{2} \lor u = -3$

Reubstitution :

$$3^x = -3 \lor 3^x = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \{ \quad \}$$

---

9. Gegeben :



$\overline{BD} = a = 50, \alpha = 40°, \gamma = 60°$ und $\delta = 80°$

Bestimme $\overline{AC} = x$ mit einer Genauigkeit von 2 Dezimalen.

Lösung :

1. Berechnung von $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ mit dem Sinussatz

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \delta)} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 50 \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 40°} \approx 67{,}4$$

Analog ergibt sich $\overline{DC} = 67{,}4$

2. Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC} = 67{,}4$

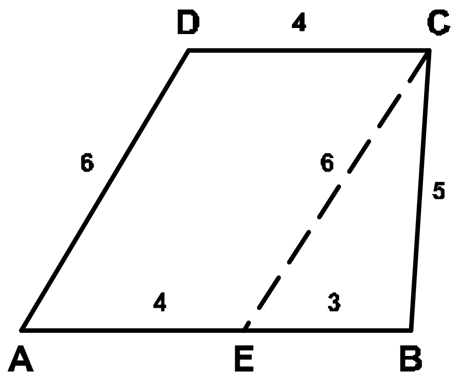
Das ergibt mit dem Cosinussatz oder Sinussatz $x = 103{,}3$

10. In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ $a = 7, b = 5, c = 4$ und $d = 6$.

Bestimme die Innenwinkel des Trapezes.

Lösung :

Man zerlegt das Trapez durch eine Parallele zu C zu AD in ein Parallelogramm und ein Dreieck.



Anwendung des Cosinussatzes Auf des Dreieck EBC ergibt

$$\cos\beta = \frac{3^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{2}{30} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 93{,}8°$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \approx 86{,}2°$$

Für $\varepsilon = \angle BEC$ erhält man

$$\cos\varepsilon = \frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 56{,}3°$$

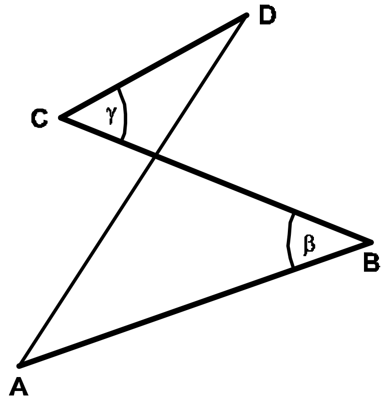
$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 56{,}3° \quad \Rightarrow \quad \delta = 123{,}7°$$

---

11. Es ist $\beta = 38°$, $\gamma = 43°$, $a = \overline{AB} = 11$, $b = \overline{BC} = 6{,}5$

    und $c = \overline{CD} = 9$.

    Bestimme $d = \overline{DA}$.



Lösung :

1. Berechnung von $\overline{AC}$

$$\overline{AC}^2 = a^2+b^2-2ac\cdot\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{11^2+6{,}5^2-2\cdot 11\cdot 6{,}5\cdot\cos 38°} \approx 7{,}1$$

2. Berechnung von $\varepsilon = \measuredangle ACB$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2+b^2-2\cdot\overline{AC}\cdot b\cdot\cos\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \cos\varepsilon = \frac{\overline{AC}^2+b^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot b}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{7{,}1^2+6{,}5^2-11^2}{2\cdot 7{,}1\cdot 11} \approx 100{,}5°$$

3. Berechnung vom $\overline{AD}$

$$\overline{AD}^2 = a^2+d^2-2\cdot a\cdot d\cdot\cos(\varepsilon+\gamma) \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} \approx \sqrt{11^2+9^2-2\cdot 9\cdot 11\cdot\cos 143{,}5°} \approx 19$$
