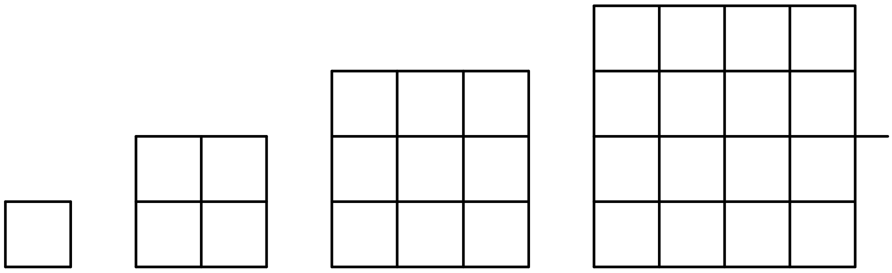
1. Die reellen Zahlen

1.1 Das Quadrieren

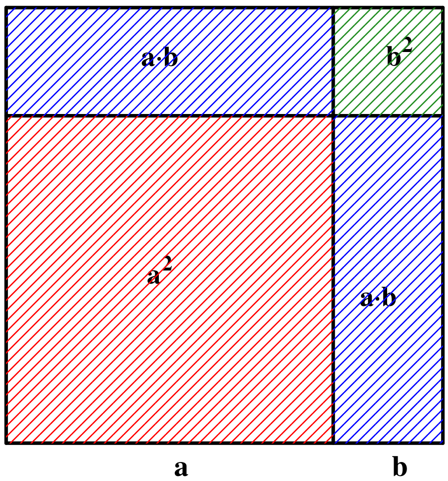


- Multipliziert man eine rationale Zahl a mit sich selbst, so erhält man ihr **Quadrat**. Man schreibt

$$\boxed{\mathbf{a \cdot a = a^2}}$$

Quadrate ganzer Zahlen heißen **Quadratzahlen**.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361



- Quadrat einer Summe $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

- Quadrat einer Differenz : $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

- Quadrat eines Produkts : $\boxed{(ab)^2 = a^2b^2}$

- Quadrat eines Quotienten : $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}}$

► $(5x)^2 = 25x^2$

► $\left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \frac{a^2}{4b^2}$

► $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

► $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

Terme, die sich in Quadrate verwandeln lassen, heißen vollständige Quadrate.

• **Eigenschaften des Quadrierens** :

a	a^2
gerade Zahl	gerade Zahl
ungerade Zahl	ungerade Zahl
$\in \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{N}_0^+$
$\in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$	$\in \mathbb{Q}_0^+\backslash\mathbb{Z}$

1.2 Quadratische Gleichungen

• Eine Gleichung, in der die Lösungsvariable im Quadrat und nur im Quadrat vorkommt, heißt **reinquadratische** Gleichung.

Sei $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

► $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \quad L = \{3; -4\}$

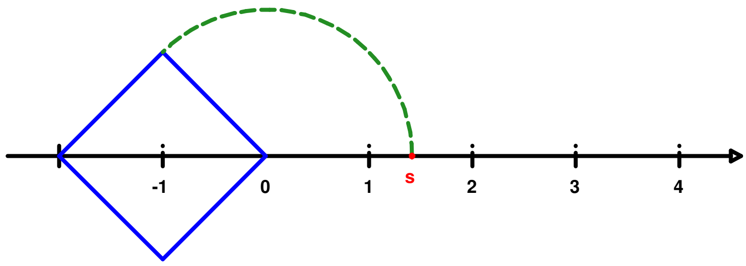
► $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$

► $(2x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \vee 2x-1 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

► $x^2 = 2 \Rightarrow L = \{\}$

• Die quadratische Gleichung $x^2 = a$ besitzt in $G = \mathbb{Q}$ höchstens zwei Lösungen.

1.3 Irrationale Quadratwurzeln - die reellen Zahlen



• Feststellung

1. Es gibt ein Quadrat mit dem Inhalt 2

2. Dann gibt es auch eine positive Zahl s mit $x^2 = 2$. Man bezeichnet sie mit $\sqrt{2}$.

3. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

► Näherungsweise Berechnung von $\sqrt{2}$:

$1^2 = 1$ und $2^2 = 4$	also $1 < s < 2$	$s \in [1;2]$
$1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$	also $1{,}4 < s < 1{,}5$	$s \in [1{,}4;1{,}5]$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$	also $1{,}41 < s < 1{,}42$	$s \in [1{,}41;1{,}42]$

Die Zahl $\sqrt{2}$ läßt sich nur als **unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch** darstellen.

• Man nennt solche Zahlen **irrationale** Zahlen.

Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden die irrationalen Zahlen die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen** Zahlen.

Jeder Punkt auf der Zahlengeraden entspricht dann einer reellen Zahl.

1.4 Quadratwurzeln

• Die **Quadratwurzel** $\sqrt{a}$ von $a \geq 0$ ist die positive Zahl, die quadriert a ergibt.

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{a}}$$

$\sqrt{}$ heißt **Wurzelzeichen**

a heißt **Radikand**

► $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$

$\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$

$\sqrt{0{,}4} = 0{,}632455...... \approx 0{,}6325$

• Das Berechnen der Quadratwurzel nennt man **Wurzelziehen** oder **Radizieren**.

Quadratwurzel lassen sich nur exakt berechnen, wenn der Radikand ein Quadrat ist.

► Beachte : $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ jedoch $\sqrt{(-3)^2} = 3 = -(-3)$

• Allgemein gilt : $\boxed{\sqrt{\mathbf{a^2}} = |\mathbf{a}|}$

► $\sqrt{a^2b^4} = |ab^2| = a \cdot |b^2|$

$\sqrt{a^{-2}} = a^{-1}$ für $a > 0$ und $\sqrt{a^{-2}} = -a^{-1}$ für $a < 0$.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 \ , & x \geq 3 \\ -(x-3) \ , & x \leq 3 \end{cases}$$

1.5 Die Bestimmung irrationaler Quadratwurzeln

$$1^2 < 3 < 2^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \in [1; 2]$$

$$1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \in [1{,}7; 1{,}8]$$

• Eine irrationale Quadratwurzel bestimmt man mit einer **Intervallschachtelung**.

Das ist eine Folge $I_0, I_1, I_2, ...$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften :

1. Jedes Intervall ist im vorhergehenden Intervall enthalten.

2. Die Intervalllänge wird beliebig klein.

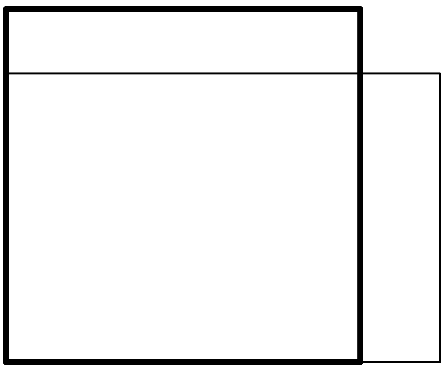
► Mit einerIntervallschachtelung lässt sich auch die Wurzel einer Quadratwurzel bestimmen

So ist $\sqrt{\sqrt{2}}$ ist die Zahl, die quadriert $\sqrt{2}$ ergibt d.h. deren 4. Potenz gleich 2 ist.

Es ergibt sich : $\sqrt{\sqrt{2}} = 1{,}189207......$

• Beim Heron-Verfahren versucht man ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a zu konstruieren. Die Seite dieses Quadrat hat dann die Länge $\sqrt{a}$.

► Berechnung der Quadratwurzel von 6



Man nähert das Quadrat mit dem Flächeninhalt 6 durch flächengleiche Rechecke an

Länge des 1. Rechtecks : $x_1 = 3$

Breite des 1. Rechtecks : $y_2 = \dfrac{6}{x_1} = 2$

Als Länge für das zweite Rechteck wählt man das arithmetische Mittel der Seiten des ersten Rechtecks.

Länge des 2. Rechtecks : $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1) = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{6}{x_1}) = 2{,}5$

Breite des 2. Rechtecks : $y_2 = \frac{6}{2{,}5} = 2{,}4$

Man setzt das Verfahren fort.

Länge des 3. Rechtecks : $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2) = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{6}{x_2}) = 2{,}45$

Breite des 2. Rechtecks : $y_3 = \frac{6}{2{,}45} = 2{,}4448979....$

- ach der Wahl eines Startwertes x_1 liefert die Formel

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$

immer bessere Näherungswerte für $\sqrt{a}$

►Approximation irrationaler Zahlen durch Kettenbrüche

$\sqrt{2}$ kann auch durch die Folge von Brüchen

$1,\ 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5},\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12},\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}$ usw. angenähert

werden d.h. es ist

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + ...}}}$$

Es ist bereits $\left|\sqrt{2} - \frac{41}{29}\right| < 0.0005$ d.h. die Annäherung ist sehr gut

---

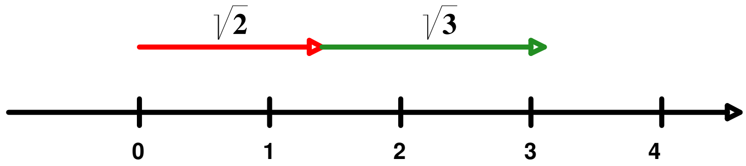
1. 6. Das Rechnen mit Quadratwurzeln

► $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

$\sqrt{2}+\sqrt{2} = 1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\sqrt{2} = (1+1)\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$



$\sqrt{2} \in \left[1, 2\right], \sqrt{3} \in \left[1; 2\right] \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} \in \left[2; 4\right]$

$\sqrt{2} \in \left[1{,}4;\ 1{,}5\right], \sqrt{3} \in \left[1{,}7;\ 1{,}8\right] \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} \in \left[3{,}1;\ 3{,}3\right]$ usw.

• Im Allgemeinen ist ein Summenterm aus Quadratwurzeln nicht vereinfachbar.

Nur Quadratwurzeln mit gleichem Radikanden lassen sich zusammenfassen.

Es ist

$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ und $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$

• Für das Produkt zweier Quadratwurzweln gilt

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{a}}\cdot\sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{ab}}}$$

► $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$ und $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$

• Für den Quotienten zweier Quadratwuzeln gilt

$$\boxed{\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}}$$

► Binomische Formeln :

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = 8 - 2\sqrt{15}$

► Unter die Wurzel ziehen :

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{12} a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

► Teilweises Radizieren : $\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

►Rationalmachen des Nenners :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{6}+3}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$$

Aufgaben

1. Vereinfache

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}}:\sqrt{\frac{3}{4}}$ c) $\frac{\sqrt{x^4y^3}}{\sqrt{y}}$ d) $(\sqrt{a}+\sqrt{2a})^2$

e) $\sqrt{4a^2+4a+1}$ f) $\sqrt{x^2-6xy+9y^2}$ g) $5\sqrt{a}+6\sqrt{b}-8\sqrt{b}+7\sqrt{a}$

---

2. Ziehe teilweise die Wurzel

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{4a}$ c) $\sqrt{98a^5b^3}$ d) $\sqrt{12a^3b^3-8a^2b^2}$

---

3. Vereinfache

a) $\sqrt{6\cdot 10^{121}}\cdot\sqrt{3\cdot 10^{-40}}$ b) $\sqrt{50}-\frac{3}{4}\sqrt{72}-\sqrt{98}$

c) $3\sqrt{150}-\frac{1}{4}\sqrt{363}-\sqrt{\frac{3}{16}}$ d) $\left(\sqrt{150}-2\sqrt{1,5}-\sqrt{24}\right)^3$

e) $\sqrt{75}-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

---

4. Vereinfache

a) $\sqrt{\frac{4a^2+8a^4}{0,25b^6}}$ b) $\sqrt{\frac{b^4+b^2}{72a^4}}$

c) $\sqrt{3x^3+12x^2+12x}$ mit $x\geq 0$ d) $-\frac{xy}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{x^2y}}$ mit $(x, y>0)$

---

5. Vereinfache

a) $\frac{\sqrt{75x^3y^5}}{\sqrt{32z}}\cdot\frac{\sqrt{z^7}}{\sqrt{6xy^3}}$ b) $\sqrt{\frac{1,125a}{b^3}}:\left(\sqrt{\frac{10a}{b^4}}:\sqrt{\frac{b^5}{5a^2}}\right)$

---

6. Vereinfache

a) $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{0,1}-3\sqrt{10}\right)\cdot 2\sqrt{5}$ b) $\left(3\sqrt{2}-4\right)\cdot 2\sqrt{8}-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2$

---

7. Mache den Nenner rational und vereinfache gegebenenfalls

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{7}{\sqrt{21}}$ c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$ f) $\frac{1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ h) $\frac{\sqrt{21}-3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

i) $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ j) $\sqrt{32}-\frac{7}{\sqrt{8}}$
