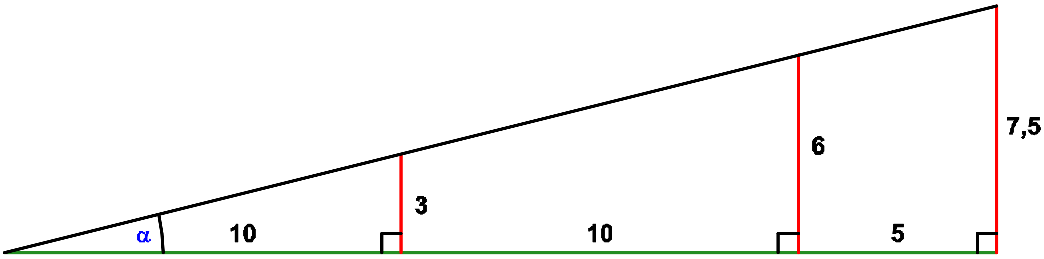
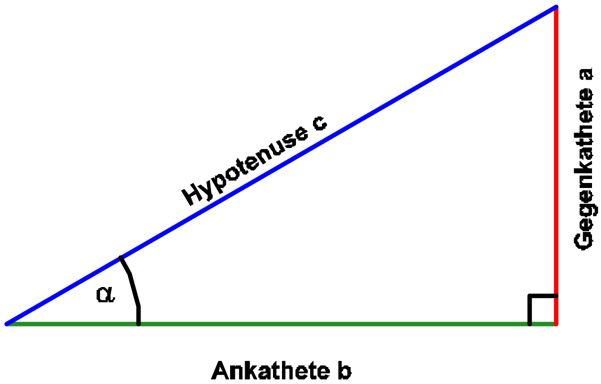
Trigonometrie
===
Der Tangens eines Winkels



Steigung : $m = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{7,5}{25} = 30\%$



In allen rechtwinkligen Dreiecken, die im Winkel α übereinstimmen, ist der Quotient aus der Länge der Gegenkathetete und der Länge der Ankathete des Winkels α - das Verhältnis von Gegenkathetete und Ankathete- gleich groß und nur von der Größe von α abhängig.

Man nennt dieses Verhältnis den Tangens von α und schreibt

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}}$$

- Die Steigung einer Straße ist gleich dem Tangenswert des Winkels, den Straße mit der der Horizontalen bildet.

- Für den spitzen Winkel α den die Gerade $y = mx + t$ mit der x-Achse einschließt gilt

$$\tan\alpha = |m|$$

- Die Tangenswerte von Winkeln lassen sich mit dem Taschrechner berechnen.

  Beispiel : $\tan 40° = 0,83909....$

- Umgekehrt lässt sich aus dem Tangenswert die Größe des Winkels berechnen.

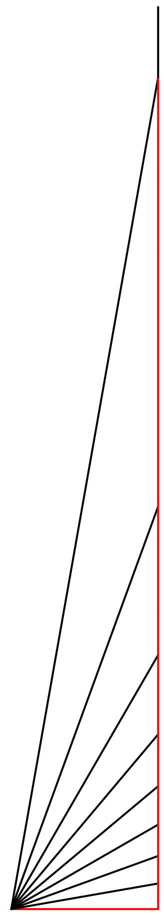
  Beispiel : $\mathrm{tann}\alpha = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 56{,}30993....° \approx 56{,}31°$

- Graphische Bestimmung von Tangenswerten

  Mittels Messung und Rechnung ergibt sich

α	$\tan\alpha$
10°	0,18
20°	0,36
30°	0,58
40°	0,84
50°	1,19
60°	1,73
70°	2,75
80°	5,67

Sinnvoll ist : $\boxed{\tan 0° = 0}$

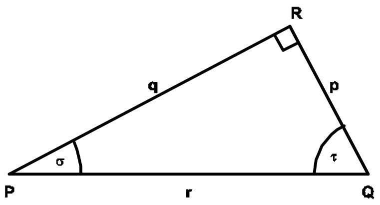


20 mm

- Wichtige Tangenswerte

α	0°	30°	45°	60°
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

• Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck



Das Dreieck PQR hat bei R einen rechten Winkel.

a) Gegeben : $\sigma = 65°$ und $q = 6$ cm

Gesucht : r, p und τ

$$\tan\sigma = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad q \cdot \tan\sigma = p \quad p = 6\text{ cm} \cdot \tan 65° \approx 12{,}9\text{ cm}$$

$$r^2 = p^2 + q^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{p^2 + \left(q \cdot \tan\sigma\right)^2}$$

$$r = \sqrt{(6\text{ cm})^2 + \left(6\text{ cm} \cdot \tan 65°\right)^2} \approx 14{,}2\text{ cm}$$

b) Gegeben : $\sigma = 25°$ und $p = 4$ cm

Gesucht : r, q und τ

$$\tan\sigma = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad q \cdot \tan\sigma = p \quad \Rightarrow \quad q = \frac{p}{\tan\sigma} \quad q = \frac{4\text{ cm}}{\tan 25°} \approx 8{,}6\text{ cm}$$

$$r^2 = p^2 + q^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{p}{\tan\sigma}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{(4\text{ cm})^2 + \left(\frac{4\text{ cm}}{\tan 25°}\right)^2} \approx 9{,}5\text{ cm}$$

$$\tau = 90° - 25° = 65°$$

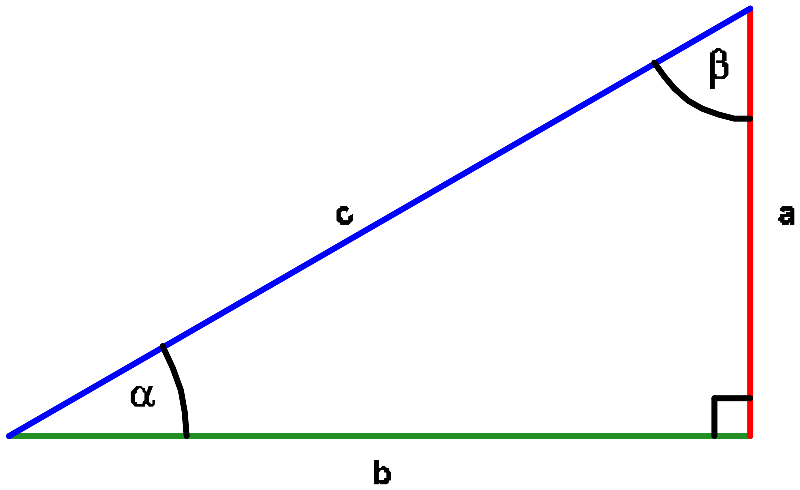
c) Gegeben : $p = 4$ cm und $q = 6$ cm

Gesucht : σ, τ und r

$$\tan\sigma = \frac{p}{q} \quad \tan\sigma = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 33{,}7°$$

$$\tau = 90° - \sigma \quad \tau \approx 90° - 33{,}7° = 56{,}3°$$

Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck



Ist α ein Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, a die Länge der gegenüberliegenden Kathete und c die Länge der Hypotenuse, dann nennt man das Verhältnis $\frac{a}{c}$ den Sinus des Winkels und schreibt

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}}.$$

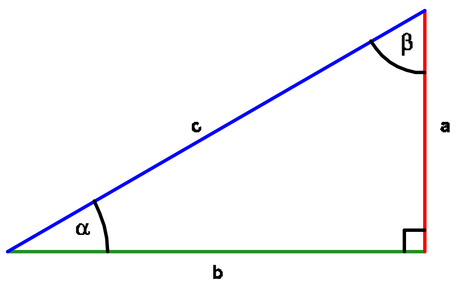
Is b die Länge der anliegenden Kathete, dann nennt man das Verhältnis $\frac{b}{c}$ den Kosinus des Winkels α.und schreibt

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}}.$$

• Wichtige Sinus- und Kosinuswerte

α	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Wichtige Formeln



Es ist

$\alpha + \beta = 90° \quad \Rightarrow \quad \beta = 90° - \alpha$

Wegen

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ sowie $\sin\beta = \frac{b}{c}$ und $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

gilt

$$\boxed{\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)} \text{ und } \boxed{\cos\alpha = \sin\beta = \sin(90° - \alpha)}$$

Es ist

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ und $\tan\beta = \frac{b}{a}$.

Also ist

$$\boxed{\tan\beta = \tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Es gilt $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Beispiel :

Wenn $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, dann gilt $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Daher ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Aufgaben

==

1. Zeichne rechtwinklige Dreieck mit der gemeinsamen Kathete $b = 5$ cm und den Winkeln

   $\alpha = 10°, 20°, ..., 80°$

   und ermittle durch Messung und Rechnung Näherungswerte für die Sinuswerte dieser Winkel.

----

2. Zeichne rechtwinklige Dreieck mit der gemeinsamen Kathete $b = 4$ cm und den Winkeln

   $\alpha = 10°, 20°, ..., 80°$

   und ermittle durch Rechnung und Messung Näherungswerte für die Kosinuswerte dieser Winkel.

----

3. Es ist $\sin\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Berechne den Kosinus- und Tangenswert dieses Winkels.

----

4. Es ist $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. Berechne $\tan(90° - \alpha)$.

----

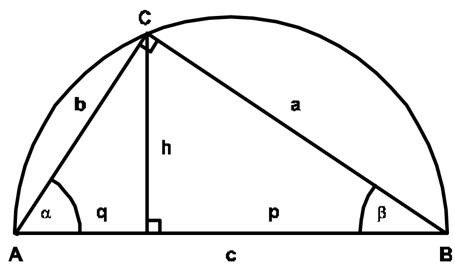
5. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b.

   Bestimme jeweils die fehlenden Stücke

	a	b	c	α	β
1.	4 cm		5 cm		
2.		4 cm	6 cm		
3.	6 cm			30°	
4.		7 cm			40°
5.	8 cm	6 cm			
6.			9 cm	50°	
7.			10 cm		60°

----

6. Berechne aus den gegebenen Größen in nebenstehendem rechtwinkligen DreieckABC die fehlenden Größen sowie den Flächeninhalt $\mathfrak{A}$



   a) $p = 5$ cm und $\beta = 70°$

   b) $p = 28$ cm und $q = 63$ cm

   c) $a = 12{,}5$ cm und $p = 4{,}4$ cm

----

7. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel der folgenden gleichschenkligen Dreiecke:

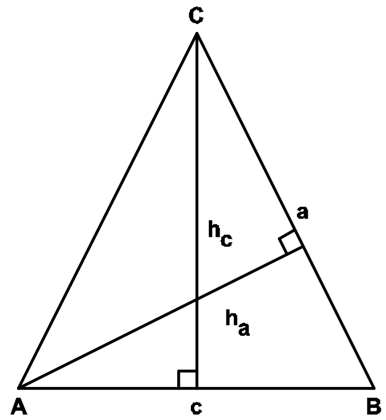
a) $c = 14$ cm und $a = b = 25$ cm

b) $s = 9$ cm und $\alpha = 70°$

c) $a = 40$ cm und $h_a = 12$ cm

d) $h_c = 60$ cm und $\gamma = 56°$

e) $h_a = 35$ cm und $\gamma = 52°$



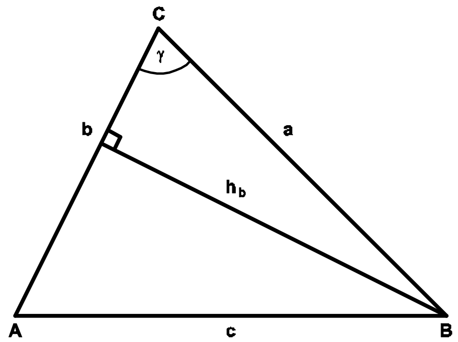
---

8. Flächeninhaltsberechnung eines Dreiecks

Für nebenstehendes Dreieck ABC gilt

$a = 6$ cm, $b = 5$ cm und $\gamma = 70°$.

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.



---

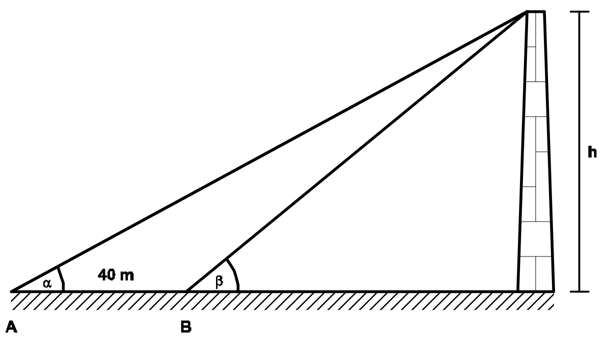
9. Der Fuß einer 3 m langen Leiter, die gegen eine Wand gelehnt ist, ist von der Wand 0,5 m entfernt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein ?

---

10. Ein Parallelogramm kennt man den Flächeninhalt 143 cm^2 sowie die Seiten $a = 17$ cm und $b = 9$ cm.

Bestimme die Winkel des Parallelogramms.

11.



Vom Punkt A aus sieht man die Spitze eines Fabrikschlotes unter einem Winkel von 30°.

Geht man man 40 m auf den Turm zu zum Punkt B, dann sieht man Spitze unter einem Winkel von 38°. Berechne die Höhe h des Turms.
