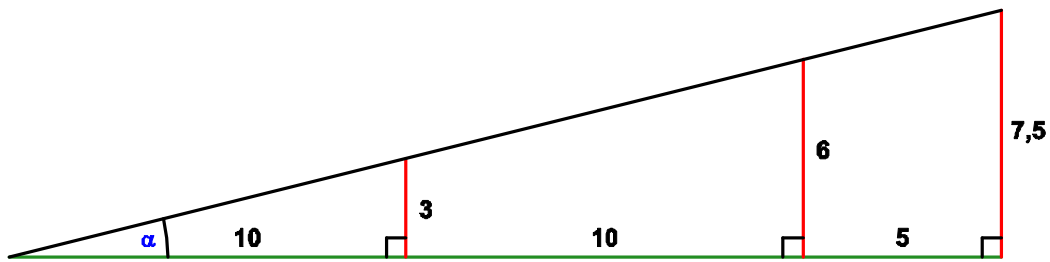
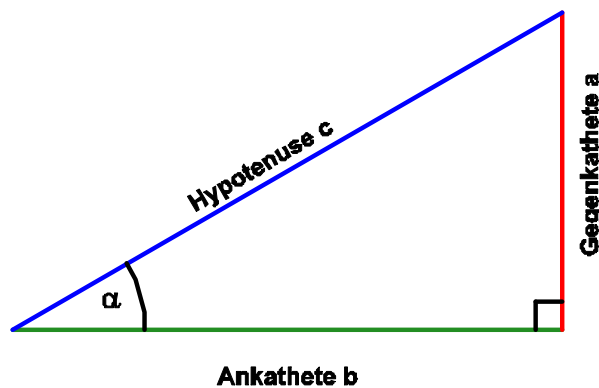


Trigonometrie

Der Tangens eines Winkels



$$\text{Steigung : } m = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{7,5}{25} = 30\%$$



In allen rechtwinkligen Dreiecken, die im Winkel α übereinstimmen, ist der Quotient aus der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete des Winkels α - das Verhältnis von Gegenkathete und Ankathete- gleich groß und nur von der Größe von α abhängig.

Man nennt dieses Verhältnis den Tangens von α und schreibt

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

- Die Steigung einer Straße ist gleich dem Tangenswert des Winkels, den Straße mit der der Horizontalen bildet.
- Für den spitzen Winkel α den die Gerade $y = mx + t$ mit der x-Achse einschließt gilt

$$\tan\alpha = |m|$$

- Die Tangenswerte von Winkeln lassen sich mit dem Taschenrechner berechnen.

Beispiel : $\tan 40^\circ = 0,83909\dots$

- Umgekehrt lässt sich aus dem Tangenswert die Größe des Winkels berechnen.

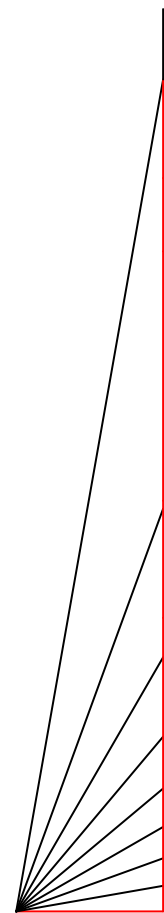
Beispiel : $\tan\alpha = 1,5 \Rightarrow \alpha = 56,30993\dots^\circ \approx 56,31^\circ$

- Graphische Bestimmung von Tangenswerten

Mittels Messung und Rechnung ergibt sich

α	$\tan\alpha$
10°	0,18
20°	0,36
30°	0,58
40°	0,84
50°	1,19
60°	1,73
70°	2,75
80°	5,67

Sinnvoll ist : $\tan 0^\circ = 0$

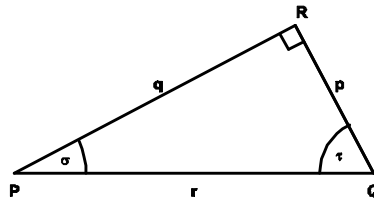


20 mm

- Wichtige Tangenswerte

α	0°	30°	45°	60°
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

• Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck



Das Dreieck PQR hat bei R einen rechten Winkel.

a) Gegeben : $\sigma = 65^\circ$ und $q = 6 \text{ cm}$

Gesucht : r , p und τ

$$\tan \sigma = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot \tan \sigma = p \quad p = 6 \text{ cm} \cdot \tan 65^\circ \approx 12,9 \text{ cm}$$

$$r^2 = p^2 + q^2 \Rightarrow r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{p^2 + (q \cdot \tan \sigma)^2}$$

$$r = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm} \cdot \tan 65^\circ)^2} \approx 14,2 \text{ cm}$$

b) Gegeben : $\sigma = 25^\circ$ und $p = 4 \text{ cm}$

Gesucht : r , q und τ

$$\tan \sigma = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot \tan \sigma = p \Rightarrow q = \frac{p}{\tan \sigma} \quad q = \frac{4 \text{ cm}}{\tan 25^\circ} \approx 8,6 \text{ cm}$$

$$r^2 = p^2 + q^2 \Rightarrow r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{p}{\tan \sigma}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{(4 \text{ cm})^2 + \left(\frac{4 \text{ cm}}{\tan 25^\circ}\right)^2} \approx 9,5 \text{ cm}$$

$$\tau = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

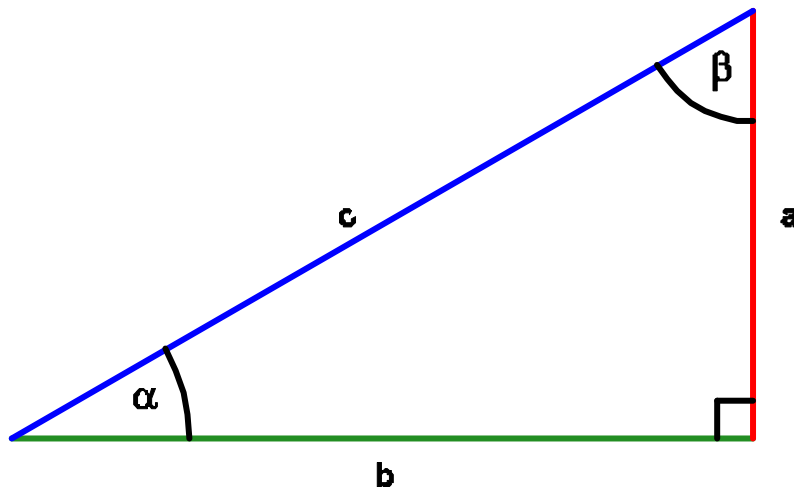
c) Gegeben : $p = 4 \text{ cm}$ und $q = 6 \text{ cm}$

Gesucht : σ , τ und r

$$\tan \sigma = \frac{p}{q} \quad \tan \sigma = \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sigma \approx 33,7^\circ$$

$$\tau = 90^\circ - \sigma \quad \tau \approx 90^\circ - 33,7^\circ = 56,3^\circ$$

Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck



Ist α ein Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, a die Länge der gegenüberliegenden Kathete und c die Länge der Hypotenuse, dann nennt man das Verhältnis $\frac{a}{c}$ den Sinus des Winkels und schreibt

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}.$$

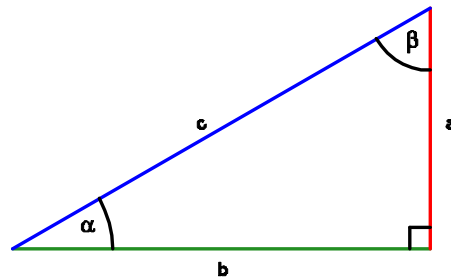
Is b die Länge der anliegenden Kathete, dann nennt man das Verhältnis $\frac{b}{c}$ den Kosinus des Winkels α .und schreibt

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}.$$

- Wichtige Sinus- und Kosinuswerte

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Wichtige Formeln



Es ist

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$$

Wegen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ und } \cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ sowie } \sin\beta = \frac{b}{c} \text{ und } \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

gilt

$$\boxed{\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)} \text{ und } \boxed{\cos\alpha = \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha)}$$

Es ist

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \text{ und } \tan\beta = \frac{b}{a}.$$

Also ist

$$\boxed{\tan\beta = \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\text{Es gilt } \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Beispiel :

$$\text{Wenn } \cos\alpha = \frac{2}{3}, \text{ dann gilt } \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

$$\text{Daher ist } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Aufgaben

1. Zeichne rechtwinklige Dreieck mit der gemeinsamen Kathete $b = 5 \text{ cm}$ und den Winkeln

$$\alpha = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$$

und ermittle durch Messung und Rechnung Näherungswerte für die Sinuswerte dieser Winkel.

2. Zeichne rechtwinklige Dreieck mit der gemeinsamen Kathete $b = 4 \text{ cm}$ und den Winkeln

$$\alpha = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$$

und ermittle durch Rechnung und Messung Näherungswerte für die Kosinuswerte dieser Winkel.

3. Es ist $\sin \alpha = \frac{1}{5} \sqrt{5}$. Berechne den Kosinus- und Tangenswert dieses Winkels.

4. Es ist $\cos \alpha = \frac{15}{17}$. Berechne $\tan(90^\circ - \alpha)$.

5. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b .

Bestimme jeweils die fehlenden Stücke

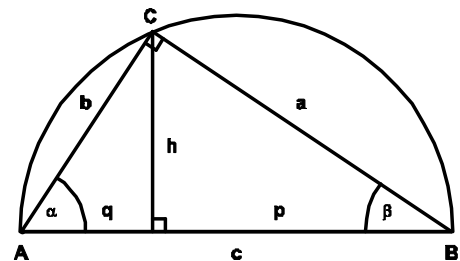
	a	b	c	α	β
1.	4 cm		5 cm		
2.		4 cm	6 cm		
3.	6 cm			30°	
4.		7 cm			40°
5.	8 cm	6 cm			
6.			9 cm	50°	
7.			10 cm		60°

6. Berechne aus den gegebenen Größen in nebenstehendem rechtwinkligen Dreieck ABC die fehlenden Größen sowie den Flächeninhalt \mathfrak{A}

a) $p = 5 \text{ cm}$ und $\beta = 70^\circ$

b) $p = 28 \text{ cm}$ und $q = 63 \text{ cm}$

c) $a = 12,5 \text{ cm}$ und $p = 4,4 \text{ cm}$



7. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel der folgenden gleichschenkligen Dreiecke:

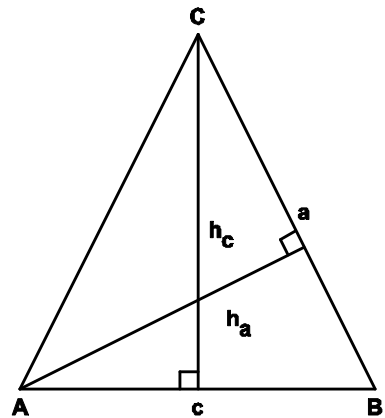
a) $c = 14 \text{ cm}$ und $a = b = 25 \text{ cm}$

b) $s = 9 \text{ cm}$ und $\alpha = 70^\circ$

c) $a = 40 \text{ cm}$ und $h_a = 12 \text{ cm}$

d) $h_c = 60 \text{ cm}$ und $\gamma = 56^\circ$

e) $h_a = 35 \text{ cm}$ und $\gamma = 52^\circ$

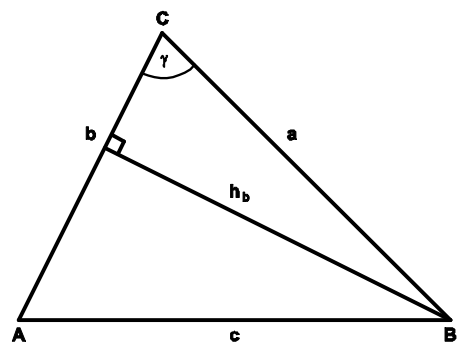


8. Flächeninhaltsberechnung eines Dreiecks

Für nebenstehendes Dreieck ABC gilt

$a = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ und $\gamma = 70^\circ$.

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

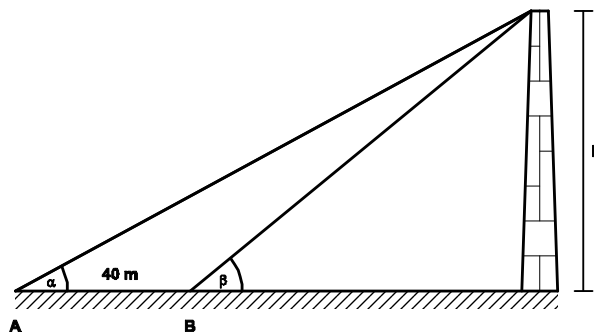


9. Der Fuß einer 3 m langen Leiter, die gegen eine Wand gelehnt ist, ist von der Wand 0,5 m entfernt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein ?

10. Ein Parallelogramm kennt man den Flächeninhalt 143 cm^2 sowie die Seiten $a = 17 \text{ cm}$ und $b = 9 \text{ cm}$.

Bestimme die Winkel des Parallelogramms.

11.



Vom Punkt A aus sieht man die Spitze eines Fabrikschlotes unter einem Winkel von 30° .

Geht man man 40 m auf den Turm zu zum Punkt B, dann sieht man Spitze unter einem Winkel von 38° . Berechne die Höhe h des Turms.