Wahrscheinlichkeitsrechnung

==

1. Eine Urne enthält 6 rote, 3 blaue und 1 schwarze Kugeln. Man zieht nacheinander ohne Zurücklegen drei Kugeln.

   a) Mit welcher W'keit zieht man drei gleichfarbige Kugeln ?

   b) Mit welcher W'keit zieht man drei verschiedenfarbige Kugeln ?

---

2. Schütze A trifft eine Scheibe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ und Schütze B trifft mit der W'keit $\frac{1}{3}$. Jeder schießt zwei mal auf dieselbe Scheibe.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Scheibe

   a) viermal   b) mindestens einmal   c) zweimal getroffen

   wird ?

---

3. In einer Schachtel sind 10 Münzen. 6 davon sind echte Münzen. Die restlichen vier haben auf beiden Seiten "Zahl".

   Du nimmst zufällig eine Münze aus der Schachtel und wirfst sie dreimal.

   Wie groß ist die W'keit für das Ergebnis "ZZZ" ?

---

4. Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechne die W'keit von

   A : Es wird keine 6 geworfen

   B : Es werden zwei Sechsen geworfen

   C : Der dritte Wurf ergibt die erste Sechs

   D : Es werden vier verschiedene Zahlen geworfen

   E : Es werden nur gerade Zahlen geworfen

   F : Eine Augenzahl wird genau dreimal geworfen

---

5. In einer Urne befinden sich vier mit den Ziffern von 1 bis 4 beschriftete Kugeln.

   Es werden 3 Kugeln mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen.

   Wie groß ist jeweils die W'keit, dass die Kugeln mit den Ziffern 1, 2 und 3 gezogen werden ?

---

6. Frank hat nur 30 % der Vokabeln gelernt. Sein Lehrer fragt ihn 4 Vokabeln ab.

   Wie groß ist die W'keit, dass er mehr als eine Vokabel kennt ?

7. Stelle dir vor, dein Lehrer wirft zwei Würfel und gibt dir als Note die kleinere der Augenzahlen. Wie groß ist die W'keit, dass du eine Eins bekommst ?

---

8. Claudia hat in einen Korb mit 6 gekochten Eiern 4 rohe dazugelegt.

   Ihre Schwester nimmt für das Frühstück 3 Eier heraus.

   Wie groß ist die W'keit, dass mindestens ein rohes Ei dabei ist ?

---

9. Herr S. behauptet, bei Schokolade blind erkennen zu können, um welche Marke und Sorte es sich handle. In einem Test probiert er vier Schokoladenproben.

   a) Wie groß ist die W'keit, dass Herr S. jedesmal die Marke und Sorte richtig erkennt, wenn er eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % hat ?

   b) Frau S. behauptet, dass man dieses Ergebnis auch erzielen könnte, wenn man keine Kenntnis habe, d.h. wenn man nur geraten hätte. Stimmt das ?

---

10. In einem Multiple-Choice-Test werden 5 Fragen gestellt. Bei jeder Frage werden 3 Ant wortalternativen vorgegeben, und nur eine ist richtig.

    a) Wie groß ist die W'keit, dass man durch bloßes Raten alle Fragen richtig beantwortet ?

    b) Wie groß ist die W'keit, drei Fragen richtig zu beantworten ?

---

1. a) $P(A) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{40} = 17{,}5\%$

   b) $P(B) = \frac{6}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{8} + \frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8} = 6\cdot\frac{1}{40} = 15\%$

---

2. a) $P(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{144} \approx 0{,}7\%$

   b) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{4} = 75\%$

   c) $P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{37}{133} \approx 25{,}7\%$

---

3. $P(E) = \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{10} = \frac{19}{40} = 47{,}5\%$

---

4. $P(A) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{625}{1296} \approx 48{,}2\%$

$$P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= 6\cdot\frac{25}{1296} \approx 11{,}6\%$$

$$P(C) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 11{,}6\%$$

$$P(D) = \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\%$$

$$P(E) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{16} \approx 6{,}25\%$$

$$P(F) = 6\cdot 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{108} \approx 0{,}93\%$$

---

5. Mit Zurücklegen : $P(E) = 3!\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{32} = 9{,}375\%$

Ohne Zurücklegen : $P(E) = 3!\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = 25\%$

---

6. $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10} - 4\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10} = 62{,}27\%$

---

7. $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\%$

---

8. $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\%$

---

9. a) $P(E) = \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 40{,}96\%$

b) $P(E) = 0{,}5^4 = 6{,}25\%$

---

10. a) $P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0{,}4\%$ b) $P(B) = 10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 16{,}5\%$

Trigonometrie

===

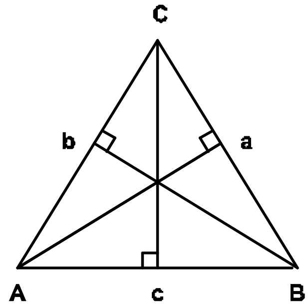
1. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt 12 cm^2 und der Spitze C messen die Basiswinkel 58,5°.

   Berechnen die Seitenlängen und Längen der Höhen des Dreiecks.

2: Berechne die Längen der Seiten und Höhen eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Umkreisradius 10 cm und dem Winkel $\gamma = 26{,}57°$.

---

1. Flächeninhalt : $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$



$$\frac{\frac{c}{2}}{h_c} = \tan\frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 2h_c \cdot \tan\frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Eingesetzt} : A = h_c^2 \cdot \tan\frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad h_c = \sqrt{\frac{A}{\tan\frac{\gamma}{2}}} \quad h_c = \sqrt{\frac{12\ cm^2}{\tan 31{,}5°}} \approx 4{,}4\ cm$$

$$\Rightarrow \quad c \approx 5{,}4\ cm$$

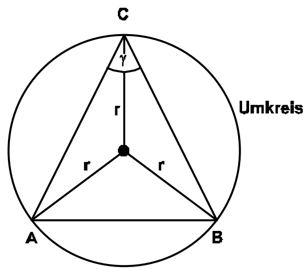
$$a = b = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2} \quad a = b \approx 5{,}2\ cm$$

$$\text{Flächeninhalt} : A = \frac{1}{2} c \cdot h_c \quad A \approx 11{,}9\ cm^2$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad \Rightarrow \quad h_a = \frac{2A}{a} \quad h_a = h_b \approx 4{,}6\ cm$$

---

2. $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad a = 2r \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \quad a \approx 19{,}5\ cm$



$$\frac{h_c}{a} = \cos\frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad h_c = a \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \quad h_c \approx 18{,}9\ cm$$

$$\frac{\frac{c}{2}}{h_c} = \tan\frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 2h_c \cdot \tan\frac{\gamma}{2} \quad c \approx 8{,}9\ cm$$

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks} : A = \frac{1}{2} c \cdot h_c \quad A \approx 84\ cm^2$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad \Rightarrow \quad h_a = \frac{2A}{a} \quad h_a = h_b \approx 4{,}3 \text{ cm}$$

Zylinder

==

1. Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Oberflächeninhalt 750 cm^2 und den Mantelflächeninhalt $M = 450 \text{ cm}^2$

.

Berechne Radius r, Höhe h und Volumen V des Zylinders!

----

2. Ein 4cm hoher Zylinder hat den gleichen Rauminhalt wie ein gleich hohes Prisma mit einem regelmäßigen Sechseck (Seitenlänge 2 cm) als Grundfläche.

Berechne die Oberflächeninhalte beider Körper und vergleiche !

---

1. $2\pi \cdot r^2 = O - M \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{O-M}{2\pi}} \quad r = \sqrt{\frac{300\text{cm}^2}{2\pi}} \approx 6{,}9 \text{ cm}$

$$2\pi r \cdot h = M \quad \Rightarrow \quad h = \frac{M}{2\pi r} \quad h \approx \frac{450\text{cm}^2}{2\pi \cdot 6{,}9\text{cm}} \approx 10{,}4 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad V = \pi \cdot (6{,}9 \text{ cm})^2 \cdot 10{,}4 \text{ cm} \approx 1{,}56 \text{dm}^3$$

----

2. $\pi r^2 \cdot h = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\pi}} \quad r \approx 1{,}8 \text{ cm}$

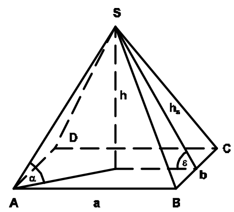
Oberfläche des Prisma : 68,8 cm^2

Oberfläche des Zylinders : 65,6 cm^2

Die Pyramide

==

1. Eine gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 4$ cm und $b = 2$ cm. Für die Höhe der Pyramide gilt $h = 3$ cm.



a) Zeichne das Dreieck DBS in wahrer Größe !

b) Sind die Dreiecke DBS und ACS kongruent zueinander ? (Begründung!)

c) Zeichne die Dreiecke ABS und BCS in wahrer Größe !

d) Berechne den Oberflächeninhalt O und das Volumen V der Pyramide.

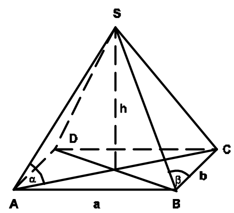
e) Berechne die Größe der Winkel α und ε.

f) Durch eine Ebene durch den Mittelpunkt der Höhe parallel zur Grundfläche wird die Ebene zwei Körper (eine Pyramide und einen Pyramidenstumpf) zerlegt.

Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Körper ?

---

2. Für nebenstehende gerade Pyramide mit der Höhe h gilt :



$a = 8$ cm und $b = 6$ cm

a) Berechne α, wenn $h = 5$ cm. b) Berechne h, wenn $\beta = 80°$.

---

1. b) Die Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent.

d) $V = \frac{1}{3} \cdot 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 8\text{ cm}^3$

$$O = 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sqrt{10}\text{ cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot \sqrt{13}\text{ cm} \approx 28\text{ cm}^2$$

e) $\alpha \approx 53{,}3°$ und $\varepsilon \approx 56{,}3°$

f) Verhältnis der Volumina : 1 : 7
