Quadratische Funktionen

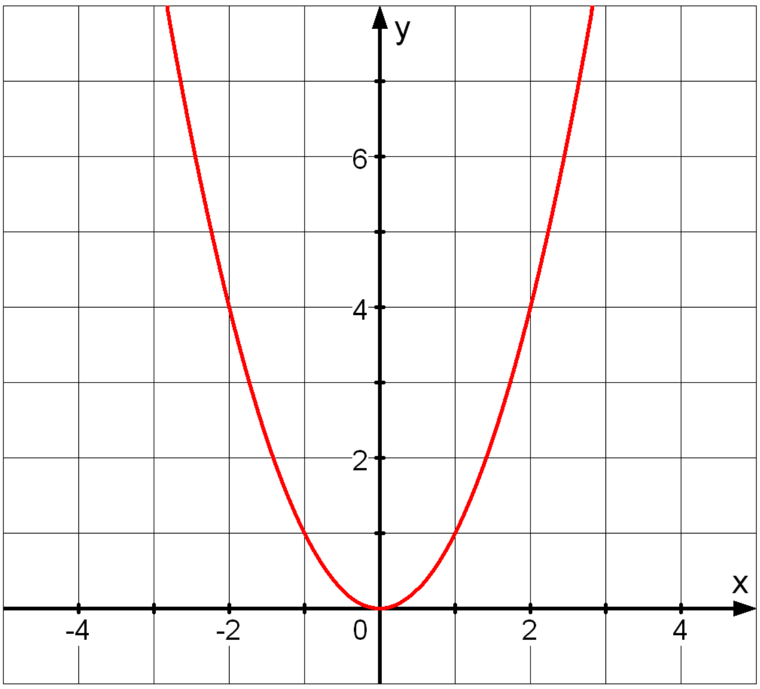
==

1. Die Normalparabel

Die Funktion $f: x \to y = x^2$, $D = \mathbb{R}$, heißt Quadratfunktion. Ihr Graph heißt Normalparabel.

Wertetabelle :

x	0	0,5	1	2	3	4	$-0{,}5$	-1
$y = f(x) = x^2$	0	0,25	1	4	9	16	0,25	1



Eigenschaften der Quadratfunktion

1. Die Wertemenge ist die Menge der nichtnegativen Zahlen $W = \mathbb{R}_0^+$

2. Die Quadratfunktion ist für $x \leq 0$ streng monoton fallend und für $x \geq 0$ streng monoton steigend.

3. Der Graph der Quadratfunktion heißt Normalparabel. Die Normalparabel

   a) besitzt den Tiefpunkt $S(0;\,0)$: Er heißt Scheitel der Parabel.

   b) ist symmetrisch zur y-Achse. Es ist $f(-x) = f(x)$ d.h. $(-x)^2 = x^2$.

2. Die allgemeine quadratische Funktion

Eine auf ganz $\mathbb{R}$ defininierte Funktion

$f : x \to ax^2 + bx + c, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, D = \mathbb{R}$

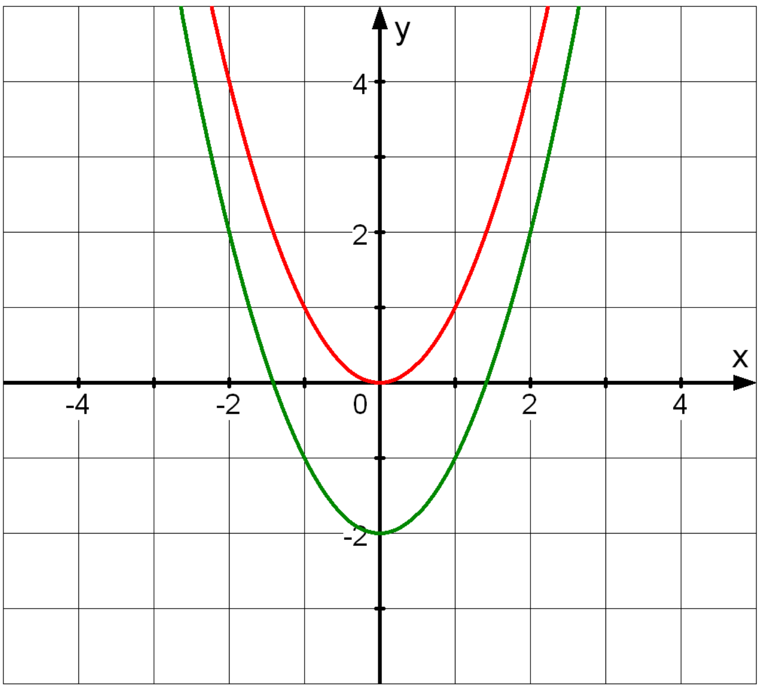
heißt allgemeine quadratische Funktion.

A Die Funktion $\mathbf{f : x \to x^2 + c}$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$.

Beispiel : $\boxed{c = -2}$ $\;\; f : x \to x^2 - 3$

Wertetabelle :

x	0	0,5	1	2	3	4	$-0{,}5$	-1
x^2	0	0,25	1	4	9	16	0,25	1
$y = f(x) = x^2 - 2$	-2	$-1{,}75$	-1	2	7	14	$-1{,}75$	-2



Der Graph der Funktion

$f: x \rightarrow x^2 + c,\ c \in \mathbb{R},\ D = \mathbb{R},$

ist eine nach oben ($c > 0$) bzw. nach unten ($c < 0$) verschobene Normalparabel.

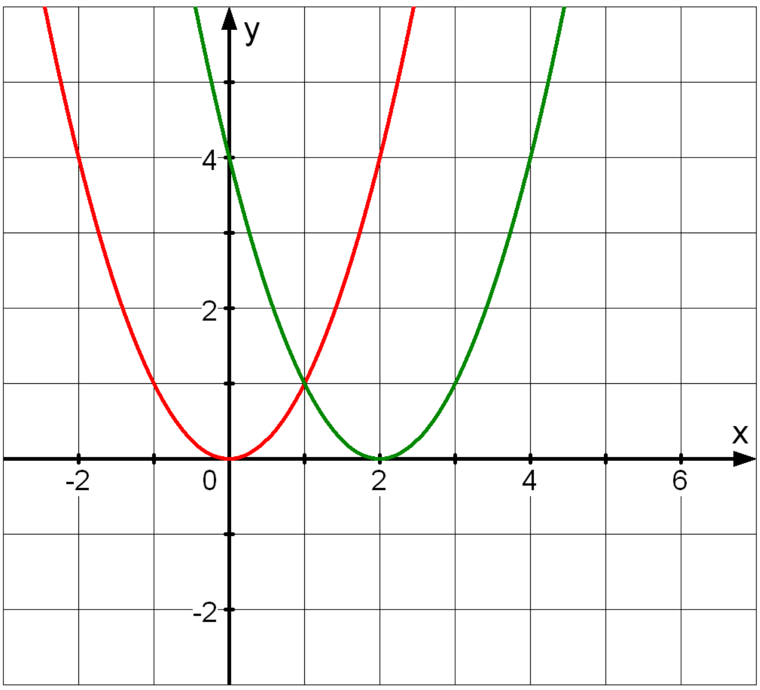
Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $S\left(0;\ c\right)$, die Wertemenge der Funktion ist $W = [c; \infty[$.

B Die Funktion $f: x \rightarrow (x-s)^2$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$.

Beispiel : $\boxed{s = 2}$

$f: x \rightarrow (x-3)^2$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$x - s$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = (x-2)^2$	9	4	1	0	1	4	9	16



Der Graph der Funktion

$f: x \to (x-s)^2$, $D = \mathbb{R}$,

ist eine nach rechts ($s > 0$) bzw. nach links ($s < 0$) verschobene Normalparabel.

Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $S\left(s; 0\right)$, die Wertemenge der Funktion ist

$W = \mathbb{R}_0^+$.

C Die Funktion $\mathbf{f: x \to (x-s)^2 + t}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$

Der Graph der Funktion

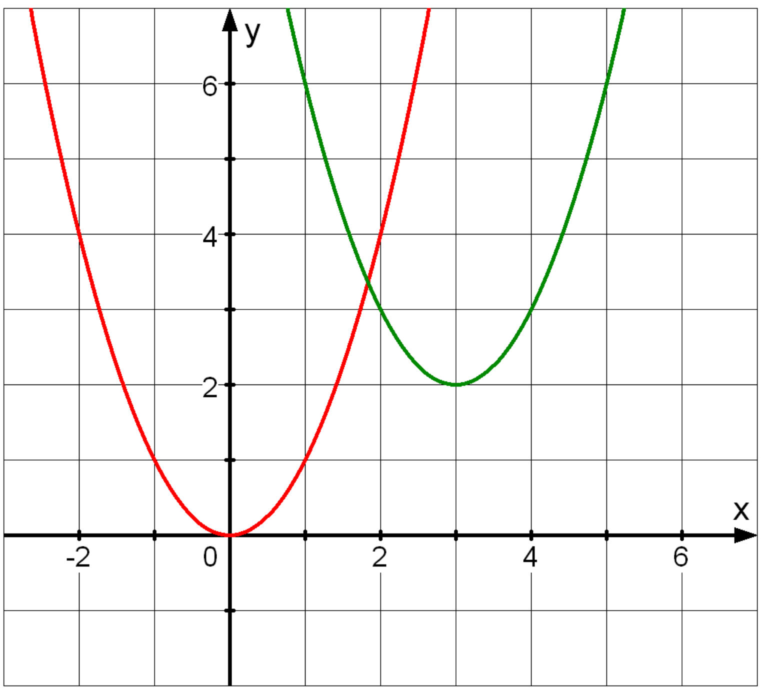
$f: x \mapsto (x-s)^2 + t$, $s, t \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$

ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(s; t\right)$.

Die Wertemenge der Funktion ist $W = [t; \infty[$

Beispiel : $\boxed{s = 3 \ \ t = 2}$

$f: x \to (x-3)^2 + 2$



D Die Funktion $\mathbf{f: x \to x^2 + px + q}$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$-

Beispiel : $\boxed{p = -6 \;\; q = 1}$

$f : x \mapsto x^2 - 6x + 1$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Umformung des Funktionsterms :

$f(x) = x^2 - 6x + 1 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 1 = (x-3)^2 - 8$

Ergebnis :

Der Graph der Funktion ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitel S(3;-8)

Eine allgemeine Rechnung ergibt

Satz :

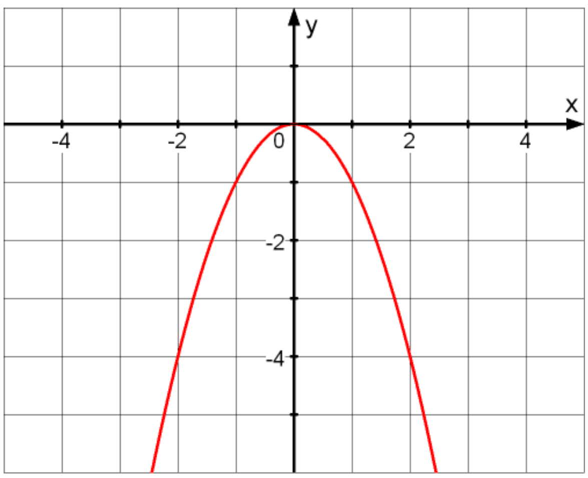
Der Graph der Funktion

$f : x \to x^2 + px + q$, $D = \mathbb{R}$,

ist Normalparabelmit dem Scheitel $S\left(-\frac{p}{2}; q - \frac{p^2}{4}\right)$ und der Wertemenge

$W = [q - \frac{p^2}{4}; \infty[$

E Die Funktion $\mathbf{f: x \to -x^2}$ mit $D = \mathbb{R}$



Der Graph der Funktion

$f : x \to -x^2, D = \mathbb{R},$

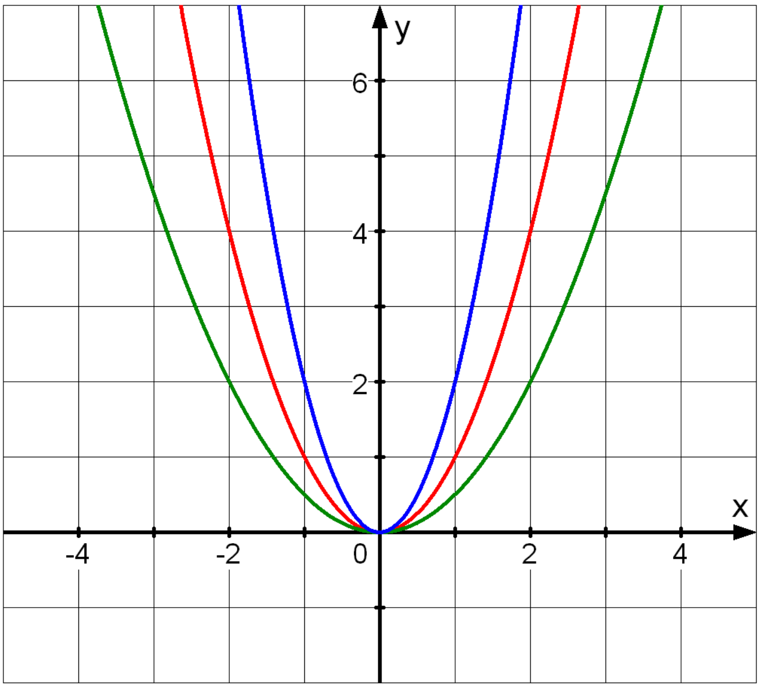
ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(0; 0\right)$. Der Scheitel ist Hochpunkt der Parabel.

F Die Funktion $\mathbf{f : x \to ax^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $D = \mathbb{R}$.

Beispiele

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$ bzw. $\boxed{a = 2}$

$f_1 : x \to \frac{1}{2}x^2, D = \mathbb{R}$ bzw. $\qquad f_2 : x \to x^2, D = \mathbb{R}$



Der Graph der Funktion $f : x \to ax^2, D = \mathbb{R};$

eine eine nach oben geöffnete$(a > 0)$ bzw. nach unten geöffnete $(a < 0)$

und verbreiterte $(|\,a\,| < 1)$ bzw. gestauchte $(|\,a\,| > 1)$ Parabel.

F Die Funktion $\mathbf{f : x \to a(x-s)^2 + t}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$

Der Graph der Funktion

$f: x \to a(x-s)^2 + t$

ist eine allgemeine Parabel mit dem Scheitel $S\left(s;\, t\right)$.

G Die allgemeine quadratische Funktion $\mathbf{f: x \to ax^2 + bx + c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $D = \mathbb{R}$

Beispiel : $\boxed{a = 2 \;\; b = -4 \;\; c = 3}$

$f: x \to 2x^2 - 4x + 3$

Umformung :

$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3 =$

$= 2(x^2 - 2x + 1^2) - 2 \cdot 1^2 + 3 = 2(x-1)^2 + 2$

Der Graph der Funktion ist als eine zur Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ kongruente Parabel mit dem Scheitel $S\left(1;\, 2\right)$.

Allgemeine Rechnung :

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 + (\frac{b}{2a})^2 \right] + c = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Satz :

Der Graph der Funktion

$f: x \to ax^2 + bx + c$ mit mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $D = \mathbb{R}$

ist eine allgemeine Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{b}{2a};\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Aufgaben

==

1. Zeichne die Graphen der Funktionen

   a) $f: x \to y = x^2 - 4x - 1$ und b) $g: x \to y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

   in ein Koordinatensystem.

---

2. Bestimmen u so, dass die Parabel $y = x^2 - ux + 3$

   a) durch den Punkt $P\left(1 \,\middle|\, 8\right)$ geht. b) den Scheitelpunkt bei $x = 5$ besitzt.

---

3. a) Bestimme den Scheitel der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 4$.

   b) Bestimme in Abhängigkeit von m den Scheitel der Parabel mit der Gleichung
   $y = x^2 + mx$.

---

4. Zeichne die Graphen der Funktionen

   a) $f: x \to \left|(x-2)^2 - 3\right|$ b) $g: x \to y = \left(\left|x\right| - 2\right)^2 + 3$

   c) $f: x \to \left|(x+2)^2 - 3\right|$ d) $f: x \to \left|\left|-x^2 + 4\right| - 2\right|$

   in ein Koordinatensystem.

---

5. Wie lautet die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P\left(1 \,\middle|\, 6\right)$, $Q\left(3 \,\middle|\, -4\right)$ und

   $R\left(-2 \,\middle|\, -9\right)$ geht ?

---

6. Bestimme b und c so, dass die Parabel

   a) $y = x^2 + bx + c$ den Scheitel $S\left(5 \,\middle|\, -2\right)$

   b) $y = 3x^2 + bx + c$ den Scheitel $S\left(1 \,\middle|\, 1\right)$

   besitzt.

---

7. Die Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2 - 2x + 1$ wird mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben. Bestimme die Gleichung des Bildes in der Form $y = ax^2 + bx + c$.

---

8. Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 4x - 5$ wird

a) an der x-Achse b) an der y-Achse.

Bestimme die Gleichung der Bilder in der Form $y = ax^2 + bx + c$.

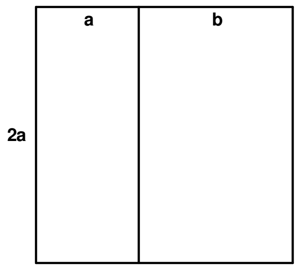
---

9. Bestimme rechnerisch die Koordinaten Schnittpunkte der Parabel $p: y = x^2 - 6x + 11$ mit der Geraden g durch die Punkte $A\left(8 \mid 9\right)$ und $B\left(-4 \mid -13\right)$.

---

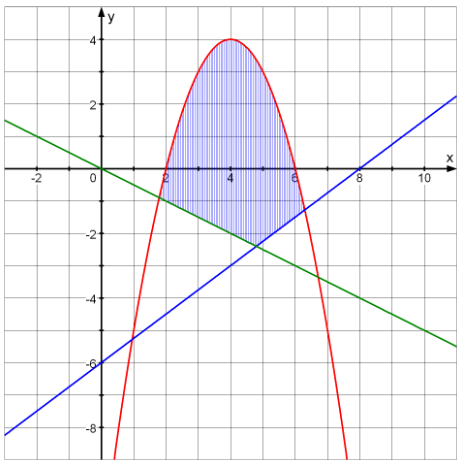
10. Ein Bauer besitzt 2400m Weidezaun um zwei aneinander grenzende Weidefläche samt Grenze einzuzäunen.

Wie muss man a und b zu wählen, damit die gesamte Weidefläche möglichst gross wird?



---

12. Welches Ungleichungssystem hat als Lösung den Rand und das Innere des schraffierten Gebietes ?



---

13. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 3x - 5$.

a) Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt. Wie lautet die Gleichung des Bildes ?

b) Die Parabel wird an $\left(0 \mid 0\right)$ mit $m = 2$ gestreckt. Wie lautet die Gleichung des Bildes ?

---

14. Wie lautet die Gleichung der Parabel durch die Punkte

a) $A\left(1\,\middle|\,15\right)$. $B\left(-2\,\middle|\,-15\right)$ und $C\left(3\,\middle|\,5\right)$

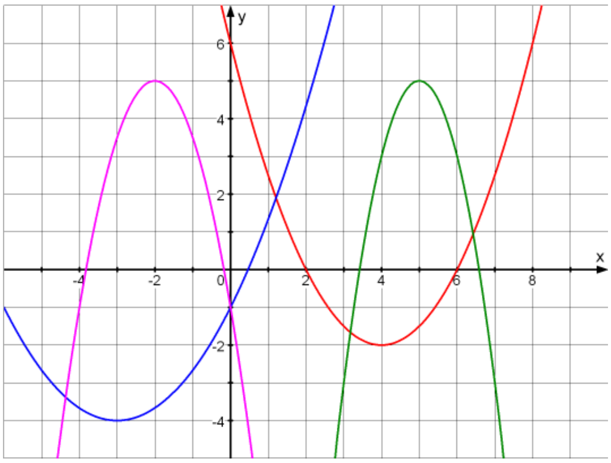
b) $A\left(0\,\middle|\,0\right)$. $B\left(1\,\middle|\,2\right)$ und $C\left(2\,\middle|\,3{,}9\right)$

---

15. Schraffiere die Lösungsmenge

(1) $y \le -x^2 + 4x + 2$ (2) $y \ge x^2 - 3$ (3) $y \ge \frac{1}{2}x + 1$

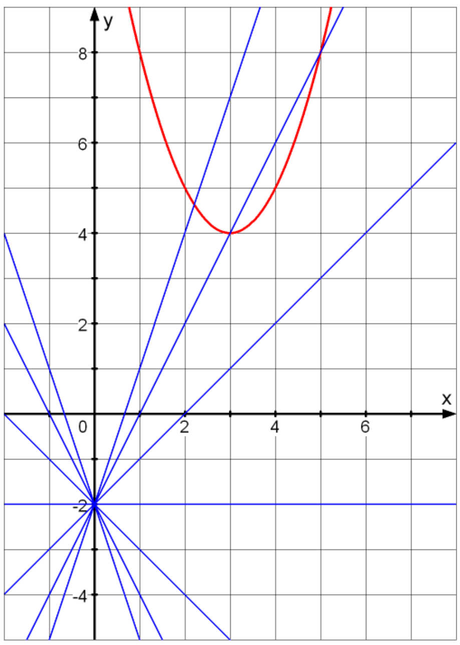
16.



Wie lauten die Gleichungen der Parabeln ?

---

17. Geraden durch denn Punkt $A\left(0\,\middle|\,-2\right)$ schneiden die Parabel $y = \left(x-3\right)^2 + 4$ in 2 Punkten, berühren sie oder schneiden sie nicht.



a) Welche Steigung muss eine Gerade durch A haben, damit sie die Parabel in zwei Punkten schneidet ?

b) Welche Steigung muss eine Gerade durch A haben, damit sie die Parabel berührt ?

---

18. Gegeben ist die Parabel

a) $y = \left(x-3\right)^2 + 4$ und der Punkt $P\left(10\,\middle|\,4\right)$ b) $y = \left(x-6\right)^2 + 3$ und der Punkt $P\left(2\,\middle|\,-3\right)$

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten durch P an die Parabel und welche Koordinaten haben die Berührungspunkte ?

---

19. Im Koordinatensystem liegen die Punkte $P_1\left(0 \,\middle|\, 0\right)$, $P_2\left(2 \,\middle|\, 5\right)$, $P_3\left(5 \,\middle|\, 8\right)$ und $P_4\left(9 \,\middle|\, 3{,}5\right)$3

Liegt der Punkt P_4 auf der Parabel durch die P_1, P_2 und P_3 ?
