

Quadratische Gleichungen

1. Quadratische Ergänzung

Löse die angegebenen Gleichungen mit quadratischer Ergänzung,.

a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$ c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$
d) $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ e) $x^2 - x = 2$

2. Die Lösungsformel

Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$ mit der Lösungsformel.

a) $3x^2 - 7x - 4 = 0$ b) $x^2 - 1,8x + 0,81 = 0$ c) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$
d) $0,4t^2 - 3,2t + 2 = 0$ e) $-z^2 - z - 1 = 0$ f) $5x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$

3. Sonderfälle quadratischer und anderer Gleichungen

Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$

a) $7x^2 - 28 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 6 = 0$ c) $4x^2 + 1 = 0$ d) $2 \cdot (x+3)^2 = 4$
e) $(2x+3)^2 = 4$ f) $(3x-1)(2x+1) = 0$ g) $3x^2 + 4x = 0$ h) $2x^3 - x = 0$
i) $(2x^2 + 1) \cdot (4x^2 - 1) \cdot (8x + 1) = 0$

4. Substitution

Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$

a) $x^4 - 13x + 36 = 0$ b) $2x^4 - 8x^2 - 24 = 0$ c) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

5. Bruchgleichungen

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{x} = \frac{2x}{x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x-2}$ c) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{1}{x^2-x} = 1$

6. Die Diskriminante

- a) Für welche Werte von a besitzt die Gleichung $x^2 - 7x + a = 0$ zwei Lösungen ?
- b) Für welche Werte von b besitzt die Gleichung $2x^2 - 3x + b = 0$ keine Lösung?
- c) Für welche Werte von c besitzt die quadratische Gleichung $9x^2 - cx - 4 = 0$ genau eine Lösung?
-

7. Quadratische Gleichungen mit vorgegebenen Lösungen

Finde eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

- a) 4 und -5 b) 0 und -6 c) $-\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}$
-

Anwendungen

1. Schnittpunkte

Bestimme die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f und der Geraden mit der Geraden g .

- a) $f: x \rightarrow y = f(x) = 0,4x^2 - 0,8x + 2,4$ und $g: y = 2x$
- b) $f: x \rightarrow y = f(x) = -0,5 \cdot (x + 1)^2 + 4$ und $g: y = -2 + 2x$
-

2. Berührungspunkte

Bestimme m bzw. t so, dass sich die Parabel und die Gerade berühren, das heißt nur einen gemeinsamen Punkt haben. Bestimme auch die Koordinaten des Berührungspunkts!

- a) $f: x \rightarrow y = f(x) = 0,25x^2 + x - 2$ und $g: y = mx - 3$
- b) $f: x \rightarrow y = f(x) = -x^2 + 2x - 3$ und $g: y = -2x + t$
-

3. Textaufgaben

- a) Die Summe aus einer natürlichen Zahl und ihrem Quadrat beträgt 650. Wie heißt die Zahl?
- b) Das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist 240. Wie heißen die Zahlen?
- c) Eine Seite eines Rechtecks ist um 6 cm länger als die andere. Das Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von 1216 cm^2 . Wie lang sind die Rechteckseiten?
-

Lösungen

1. Quadratische Ergänzung

$$\text{a) } x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 = 7 + 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x-3 = -4 \vee x-3 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 = 8 + 1^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -3 \vee x-1 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

$$\text{c) } 2x^2 - 3x - 5 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - 1,5x - 2,5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1,5x = 2,5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1,5x - 2,5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1,5x + 0,75^2 = 2,5 + 0,75^2$$

$$\Leftrightarrow (x-0,75)^2 = 3,0625 \Leftrightarrow x-0,75 = -1,75 \vee x-0,75 = 1,5$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2,5$$

$$\text{d) } x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} = -\sqrt{\frac{17}{16}} \vee x - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{17}{16}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \vee x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$$

$$\text{e) } x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 0,5^2 = 2 + 0,5^2 \Leftrightarrow (x-0,5)^2 = 2,25$$

$$\Leftrightarrow x-0,5 = -1,5 \vee x-0,5 = 1,5 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

2. Die Lösungsformel

$$\text{a) } 3x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ax = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 97$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{97}}{6} \vee x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{97}}{6}$$

$$\text{b) } x^2 - 1,8x + 0,81 = 0$$

$$D = (-1,8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (0,81) = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1,8}{2} = 0,9$$

$$c) -3x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0 \quad D = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$d) 0,4t^2 - 3,2t + 2 = 0 \quad D = 3,2^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 2 = 7,04$$

$$\Rightarrow t = \frac{3,2 - \sqrt{7,04}}{0,9} \vee t = \frac{3,2 + \sqrt{7,04}}{0,9} \Leftrightarrow t = 4 - \sqrt{11} \vee t = 4 + \sqrt{11}$$

$$e) -z^2 - z - 1 = 0 \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0 \quad \text{keine Lösung}$$

$$f) 5x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0 \quad D = \sqrt{5}^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 25 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 5}{10} \vee x = \frac{\sqrt{5} + 5}{10}$$

3. Sonderfälle quadratischer und anderer Gleichungen

$$a) 7x^2 - 28 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$b) \frac{1}{2}x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3}$$

$$c) 4x^2 + 1 = 0 \quad \text{keine Lösung}$$

$$d) 2 \cdot (x+3)^2 = 4 \Rightarrow (x+3)^2 = 2 \Leftrightarrow x+3 = -\sqrt{2} \vee x+3 = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{2} \vee x = -3 + \sqrt{2}$$

$$e) (2x+3)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x+3 = -2 \vee 2x+3 = 2 \Leftrightarrow x = -2,5 \vee x = -0,5$$

$$f) (3x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 3x-1 = 0 \vee 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$g) 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{4}{3}$$

$$h) 2x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$i) (2x^2+1) \cdot (4x^2-1) \cdot (8x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+1 = 0 \vee 4x^2-1 = 0 \vee 8x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{8}$$

4. Substitution

a) $x^4 - 13x + 36 = 0$

Substitution: $u = x^2$

$u^2 - 13u + 36 = 0$ mit der Lösungsformel $\Rightarrow u = 9 \vee u = 4$

Resubstitution:

$x^2 = 9 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 2$

b) $2x^4 - 8x^2 - 24 = 0$

Substitution: $u = x^2$

$2u^2 - 8u - 24 = 0$ mit der Lösungsformel $\Rightarrow u = -2 \vee u = 2$

Resubstitution:

$x^2 = -2 \vee x^2 = 6 \Leftrightarrow x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$

c) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

Substitution: $u = x^2$

$4u^2 - 3u - 1 = 0$ mit der Lösungsformel $\Rightarrow u = -\frac{1}{4} \vee u = 1$

Resubstitution:

$x^2 = -\frac{1}{4} \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

5. Bruchgleichungen

a) $\frac{1}{x} = \frac{2x}{x+1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

$\frac{1}{x} = \frac{2x}{x+1} \mid \cdot x \cdot (x+1) \Rightarrow x+1 = 2x^2 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0$

mit der Lösungsformel

$\Rightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

$$b) \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x-2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2; 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x-2} \quad | \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Rightarrow (x+1)(x-2) = x-1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 = x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{mit der Lösungsformel} \\ \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2} \end{array}$$

$$c) \frac{x+1}{2x-2} - \frac{1}{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2 \cdot (x-1)} - \frac{1}{x \cdot (x-1)} = 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\frac{x+1}{2 \cdot (x-1)} - \frac{1}{x \cdot (x-1)} = 1 \quad | \cdot 2 \cdot x \cdot (x-1) \Rightarrow (x+1) \cdot x - 2 = 2x \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 2x^2 - 2x \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Lösungsformel} \quad \notin D \\ \Rightarrow \langle x = 1 \rangle \vee x = 2 \end{array}$$

6. Die Diskriminante

$$a) \text{ Bedingung: } D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a > 0 \Leftrightarrow 49 - 4a > 0 \Leftrightarrow -4a > -49 \Leftrightarrow a < 12,25$$

$$b) \text{ Bedingung: } D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot b < 0 \Leftrightarrow 9 - 8b < 0 \Leftrightarrow -8b < -9 \Leftrightarrow b > \frac{9}{8}$$

$$c) \text{ Bedingung: } D = (-c)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow c^2 + 144 = 0 \text{ (keine Lösung)}$$

Die quadratische Gleichung besitzt immer eine Lösung.

7. Quadratische Gleichungen mit vorgegebenen Lösungen

$$a) (x-4) \cdot (x+5) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

$$b) x \cdot (x+6) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \text{ und } -6$$

$$c) (x + \frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{9} = 0$$

Anwendungen

1. Schnittpunkte

$$a) \text{ Schnittbedingung: } 0,4x^2 - 0,8x + 2,4 = 2x$$

$$\Leftrightarrow 0,4x^2 - 2,8x + 2,4 = 0$$

$$D = (-2,8)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 2,4 = 4$$

$$x = \frac{2,8 - \sqrt{4}}{2} = 0,4 \quad \vee \quad x = \frac{2,8 + \sqrt{4}}{2} = 2,4$$

Eingesetzt in g:

$$y = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \quad \vee \quad x = 2 \cdot 2,4 = 4,8$$

$$S_1(0,4 | 0,8) \text{ und } S_1(2,4 | 4,8)$$

b) Schnittbedingung: $-0,5 \cdot (x+1)^2 + 4 = -2x - 2$

Umformung: $-0,5 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 4 = -2x - 2 \Leftrightarrow -0,5x^2 - x - 0,5 + 4 = -2x - 2$

$$\Leftrightarrow -0,5x^2 + x + 5,5 = 0$$

Mit der Lösungsformel ergibt sich $x = 1 - 2\sqrt{3} \vee x = 1 + 2\sqrt{3}$

mit den zugehörigen y-Werten

$$y = -2 \cdot (1 - 2\sqrt{3}) - 2 = -4 + 4\sqrt{3} \text{ und } y = -2 \cdot (1 + 2\sqrt{3}) - 2 = -4 - 4\sqrt{3}$$

2. Berührungspunkte

Die Schnittgleichung darf nur eine Lösung besitzen

$$a) 0,25x^2 + x - 2 = mx - 3 \Leftrightarrow 0,25x^2 + x - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow 0,25x^2 + (1-m)x + 1 = 0$$

Bedingung für eine Lösung:

$$D = (1-m)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1-m = -1 \vee 1-m = 1 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 0$$

Es ergeben sich dann die Schnittgleichungen

$$0,25x^2 - x + 1 = 0 \text{ mit der Lösung } x = 2 \text{ und } 0,25x^2 + x + 1 = 0 \text{ mit der Lösung } x = -2$$

Setzt man in die Gleichung der Parabel ein, erhält man die y-Werte der Berührungspunkte 1 und -3

b) Schnittgleichung: $-x^2 + 2x - 3 = -2x + t \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 - t = 0$ und $g : y = -2x + t$

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3 - t) = 0 \Leftrightarrow 16 - 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Es ergibt sich die Schnittgleichung $-x^2 + 4x - 4 = 0$ mit der Lösung $x = 1$.

Setzt man in die Gleichung der Parabel ein, erhält man y-Wert des Berührungspunkts -2

3. Textaufgaben

a) Die gesuchte natürliche Zahl sei x .

$$x + x^2 = 650 \Leftrightarrow x^2 + x - 650 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-650) = 2601$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{2601}}{2} = -26 \vee x = \frac{-1 + \sqrt{2601}}{2} = 25$$

Die natürliche Zahl ist 25.

b) 1. Zahl: x 2. Zahl $x + 1$

$$x \cdot (x + 1) = 240 \Leftrightarrow x^2 + x = 240 \Leftrightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 961$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{961}}{2} = -16 \vee x = \frac{-1 + \sqrt{961}}{2} = 15$$

Die Zahlen heißen -16 und -15 oder 15 und 16 .

c) 1. Seite: $a = x$ 2. Seite: $b = x + 6$

$$x \cdot (x + 6) = 1216 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 1216 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 1216 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1216) = 4900$$

$$x = \frac{-6 - \sqrt{4900}}{2} = -38 \vee x = \frac{-6 + \sqrt{4900}}{2} = 32$$

Eine Seite ist 32 cm und die andere 38 cm lang.
