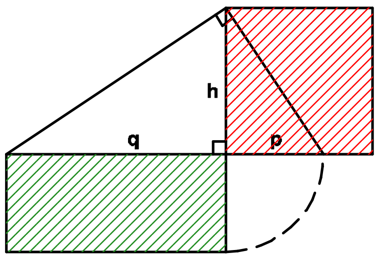
Die Satzgruppe des Pythagoras
==
Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, Katheten und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse.

Die Höhe auf die Hypotenuse zerlegte dies in zwei Teilstrecken, die Hypotenusenabschnitte.

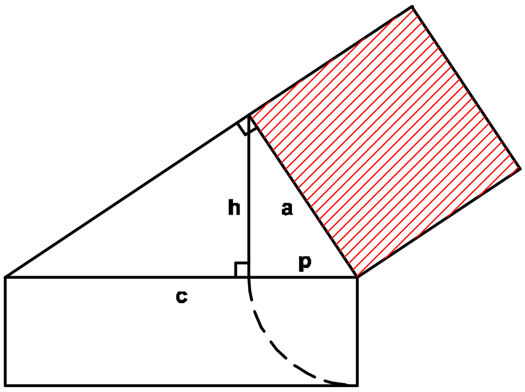
Höhensatz

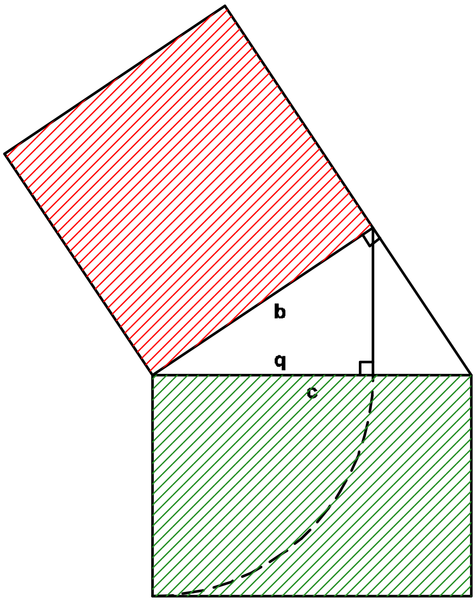


$\boxed{\mathbf{h^2 = pq}}$ mit $p + q = c$

- Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich dem Rechteck gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Die Katetensätze



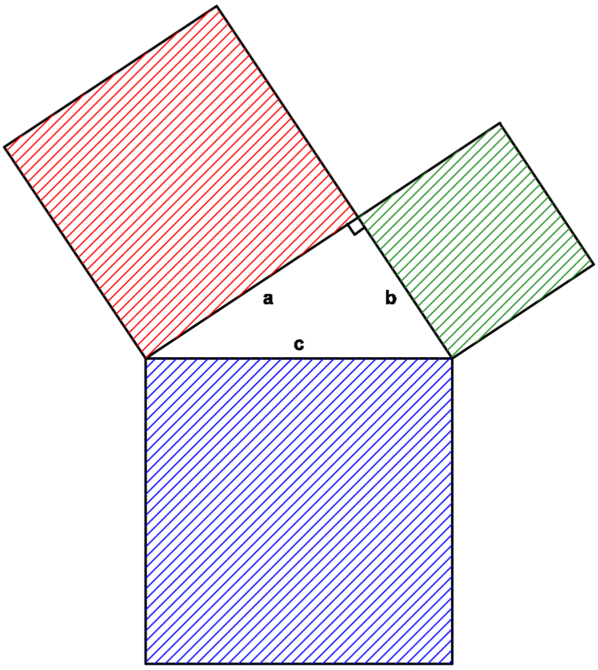


$\boxed{\mathbf{a^2 = c \cdot p}}$

$\boxed{\mathbf{b^2 = c \cdot q}}$

- Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck gebildet aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Der Satz des Pythagoras



$$\boxed{\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}}$$

- Im rechtwinkligen Dreieck ist die Flächensumme der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.

- Es gilt auch die Umkehrung :

  Gilt für ein Dreieck mit den Seiten a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, dann misst der der Seite C gegenüberliegende Winkel 90°.

  Beispiel :

  Für ein Dreieck mit den Seiten $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ gilt

  $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = c^2$.

  Also ist es rechtwinklig.

- Drei natürliche Zahlen a, b und c mit $a^2 + b^2 = c^2$ bilden ein sog. pythagräisches Zahlentripel.

  Das Dreieck mit Seitenlängen a, b und c ist dann rechtwinklig.

  Ein pythagoräisches Zahlentripel $\left(a; b; c\right)$ heißt primitiv, wenn $\mathrm{ggT}\left(a; b; c\right) = 1$ ist.

  Sind m und n zwei natürliche Zahlen mit $m > n$ und $\mathrm{ggT}\left(m; n\right) = 1$, dann bilden die Zahlen

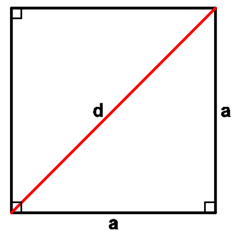
$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$ primitive pythagoräische Zahlentripel

m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
2	1	3	4	4
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25

Anwendungen :

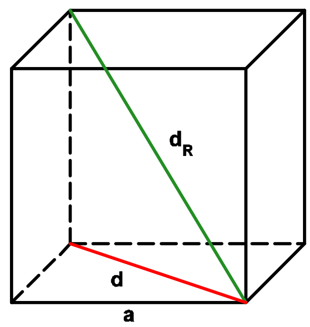
Die Länge d einer Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge a

ist gegeben durch $\boxed{d = a\sqrt{2}}$.



Die Länge d_R einer Raumdiagonale im Würfel mit der Kanten-

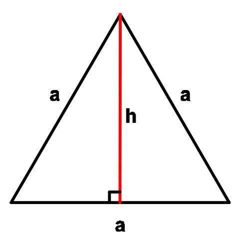
länge a ist gegeben durch $\boxed{d_R = a\sqrt{3}}$.



Die Länge h einer Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seiten-

länge a ist gegeben $\boxed{h = \frac{1}{2}h\sqrt{3}}$.

Der Flächeninhalt $\mathfrak{A}$ des Dreiecks ist dann $\boxed{\mathfrak{A} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}$.

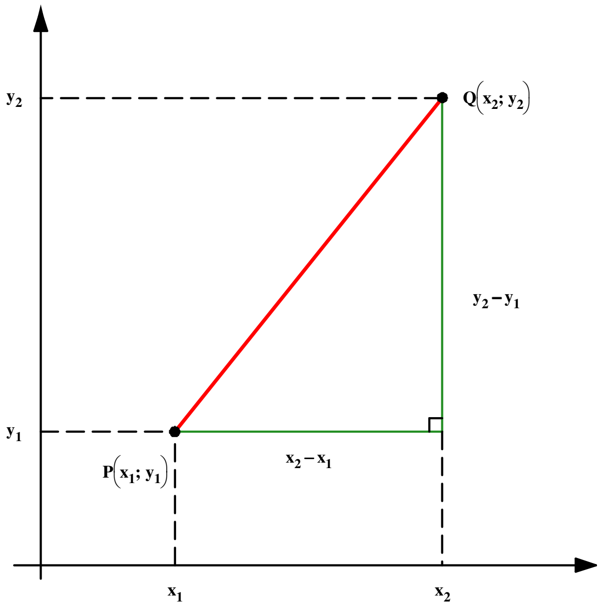


Der Abstand $d\left(P;\,Q\right) = \overline{PQ}$ zweier

Punkte $P\left(x_1;\,y_1\right)$ und $Q\left(x_2;\,y_2\right)$ im

Koordinatensystem ist gegeben durch

$$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$



Konstruktion von Strecken mit irrationaler Länge

Beispiel :

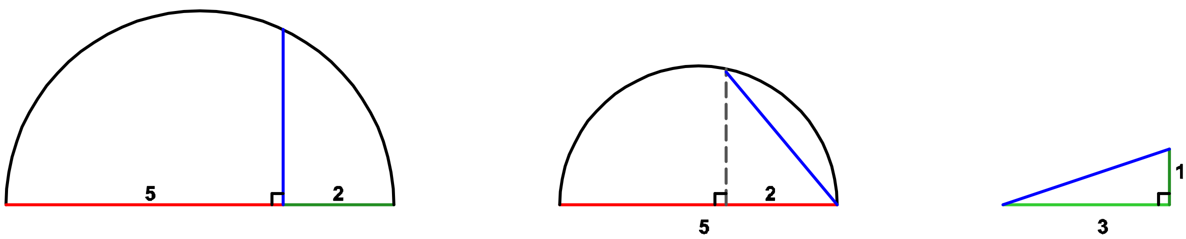
Es ist $10 = 2 \cdot 5 = 3^2 + 1^2$.

Daher lässt sich eine Strecke der Länge $\sqrt{10}$ erhalten durch Konstruktion der

a) Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitt 5 und 2.

c) Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 5 und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt 2.

c) der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 5 und 2.



Flächenverwandlungen

Beispiel :

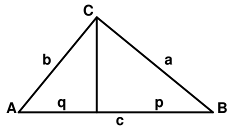
Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten 3 und 4 hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck mit den Seiten 3 und 4.

Aufgaben

---

1. In einem rechtwinkligen Dreieck (siehe Zeichnung) gilt :

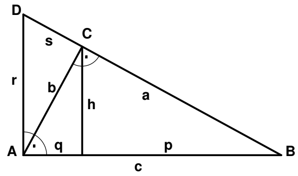
   $q = 9$ und $b = 15$ Berechne a, c, p und h.



---

2. In der nebenstehenden, nicht maßstabsgerechten Figur gilt :

   $h = 6$ und $p = 18$. Berechne q, b, s und r.



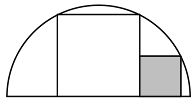
---

3. Überprüfe, ob das Dreieck ABC ($A(2; 1)$, $B(1; 10)$ und $C(6; 5)$ rechtwinklig ist und gib seinen Flächeninhalt an.

---

4. Einem Halbkreis sind zwei Quadrate einbeschrieben. Bestimme die Fläche des großen Quadrats, wenn das kleine Quadrat den Inhalt 25 besitzt.

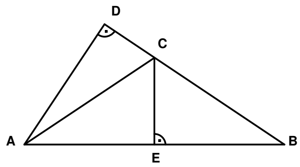
   Ist r der Radius des Halbkreises und a die Seitenlänge des großen Quadrats, dann gilt



---

5. In nebenstehender Figur gilt : $\overline{AC} = \overline{BC} = 169$ und $\overline{AB} = 312$

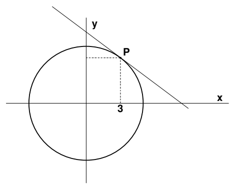
   Berechne $\overline{EC}$ und $\overline{AD}$.



---

6. Der Kreis hat den Mittelpunkt $O(0; 0)$ und den Radius $r = 5$.

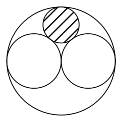
   Berechne die Steigung der Tangente in $P(3; p_2)$.



---

7. Der große Kreis hat den Radius 4. Die beiden unschraffierten Kreise haben ihre Mittelpunkte auf einem Durchmesser und sind. kongruent.

   Berechne den Radius des schraffierten Kreises.



---

8. Zwei aufeinander gestellte Würfel der Kantenlänge a bilden einen Quader. Berechne die Seitenlängen des eingezeichneten Dreiecks und zeige durch Rechnung, dass es rechtwinklig ist.