Potenzen mit ganzen Exponenten

===

1. Potenzen mit natürlichem Exponenten

Ist n eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl, dann definiert man

$$\boxed{\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}}}$$

Speziell ist $\mathbf{a^1 = a}$.

a^n heißt **Potenz**

a heißt **Basis** der Potenz

n heißt **Exponent** der Potenz.

Aufgaben

---

1. Berechne :

a) 2^3 b) $(-3)^4$ c) $(-4)^3$ d) -5^3 e) -6^3

2. Berechne :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ c) $0{,}1^2$ d) $(-0{,}02)^3$ e) $(-0{,}3)^4$

---

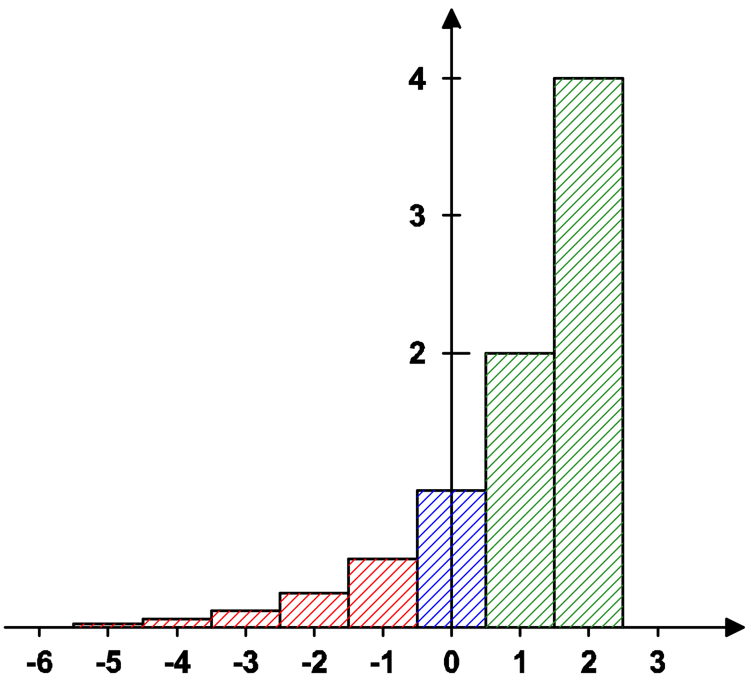
2. Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten - der Exponent Null

---

Die Definition der Potenz lässt sich sinnvoll auf negative Hochzahlen ausdehnen.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^2	$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

Veranschaulichung :



Ist n eine natürliche Zahl, dann ist $-n$ eine negative ganze Zahl. Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ definiert man

$$\boxed{\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}}$$

Speziell ist $\mathbf{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

Für den Exponenten Null definiert man $\boxed{\mathbf{a^0 = 1}}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgaben

---

1. Berechne :

a) 2^{-1} b) $(-3)^{-2}$ c) $(-4)^{-3}$ d) -5^{-4} e) -6^{-5}

2. Berechne :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ c) $0{,}1^{-2}$ d) $(-0{,}2)^{-3}$ e) $(-0{,}3)^{4}$

---

3. Das Rechnen mit Potenzen

Für ganze Exponenten n, m und für von Null verschiedene Basen a und b gilt

1. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}}$

2. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}}$

3. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^m}}$

4. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}}$

5. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}}}$

Aufgaben

---

1. Fasse zu einer Potenz zusammen :

a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $2^3 \cdot 2^{-4}$ c) $2^{-3} \cdot 2^4$ d) $2^{-3} \cdot 2^{-4}$

---

2. Fasse zu einer Potenz zusammen :

a) $\frac{a^5}{a^3}$ b) $\frac{a^{-5}}{a^3}$ c) $\frac{a^5}{a^3}$ d) $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$

---

3. Vereinfache :

a) $2^3a^4b^{-5} \cdot 2^{-5}a^{-7}b^9$ b) $\dfrac{3^{-5}a^{-3}b^4}{3^2a^{-5}b^6}$

---

4. Potenziere und vereinfache gegebenfalls :

a) $(3a)^2$ b) $(-2ab)^3$ c) $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-2}$ d) $\left(\dfrac{12a}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{b}{2a}\right)^{-5}$

---

5. Vereinfache :

a) $(a^2)^3$ b) $(-a^{-3})^{-2}$ c) $(2a^2b^{-3})^4$ d) $\left(\dfrac{3a^2}{b^{-3}}\right)^{-3}$

---

6. Schreibe als von Potenz einer Primzahl bzw. als Produkt von Primzahlpotenzen :

a) $(4)^5$ b) $(-81)^3$ c) 6^5 d) 12^{-3}

---

4. Potenzen mit rationalen Exponenten

• Der Exponent $\frac{1}{2}$

Für eine sinnvolle Definition von $2^{\frac{1}{2}}$ müsste gelten

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2^1 = 2$$

d.h. $2^{\frac{1}{2}}$ ist Lösung der der quadratischen Gleichung $x^2 = 2$.

Also legt man fest

$$\boxed{2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}}$$

und definiert allgemein

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}},\ a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$$

• Der Exponent $\frac{1}{3}$

Für eine sinnvolle Definition von $2^{\frac{1}{3}}$ müsste gelten

$$(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^1 = 2$$

d.h. $2^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der der quadratischen Gleichung $x^3 = 2$.

Man bezeichnet die Lösung dieser Gleichung als "dritte Wurzel von 2" und schreibt

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

Diese Zahl ist irrational und ihre ***Dezimalbruchentwicklung*** lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch ***Intervallschachtelung*** finden.

$1^3 = 1 < 2 < 8 = 2^3$	$1 < \sqrt[3]{2} < 2$
$1{,}2^3 = 1{,}728 < 2 < 2{,}197 = 1{,}3^3$	$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$
$1{,}25^3 = 1{,}953125 < 2 < 2{,}000376 = 1{,}26^3$	$1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$

usw.

Also legt man fest

$$\boxed{2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}}$$

► Ein Würfel mit dem Rauminhalt 2 m^3 hat die Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ m ≈ 1,26 m

• Der Exponent $\frac{1}{n}$ mit $n \geq 3$

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, ist $a^{\frac{1}{n}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung

$$x^2 = a,$$

die man als "n.te Wurzel von a" und mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}} \quad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0\ .$$

► So ist

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \text{ und } \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

► Mit dem Taschenrechner bestimmt man $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}} = 3^{0,2} = 1{,}245730....$

► Lösen von Gleichungen

Gleichung	Lösung	Erläuterung
$x^3 = 5$	$x = \sqrt[3]{5}$	
$x^3 = -5$	$x = -\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{-5}$ ist nicht definiert
$x^4 = 5$	$x = -\sqrt[4]{5} \vee \sqrt[4]{5}$	
$x^4 = -5$	keine Lösung	Vorzeichenregel : $x^4 \geq 0$

Allgemein gilt für die Lösungen der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

	$a > 0$	$a < 0$
n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$	$x = -\sqrt[n]{-a}$
n gerade	$x = -\sqrt[n]{a} \vee x = \sqrt[n]{a}$	keine Lösung

• Der Exponent $\frac{2}{3}$

Sinnvoll ist

$5^{\frac{2}{3}} = (5^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{5})^2$ bzw. $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

Es ist aber $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2}$.

• Der Exponent $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$

Man definiert

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}}, \ a \in \mathbb{R}, a \geq 0.$$

► Also $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

• Negative rationale Exponenten

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}}\,, \; a \in \mathbb{R},\; a > 0$$

---

5. Die Potenzgesetze

Die Potenzgesetze gelten auch für

1. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}}$

2. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}}}$

3. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}}}$

4. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}}}$

5. Potenzgesetz : $\boxed{\mathbf{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}}}$

mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ wobei $q, s \neq 0$.

► Damit ergibt sich z. B.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{4} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = 2^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{2^{11}}$$

$$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$54^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = (27 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$$
