Kann ich das ?

==

1. Bereche jeweils den Wert des Terms ohne Verwendung des Taschenrechners

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ c) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

d) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^2 = 4$ e) $\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{20^3} = 20$

f) $\sqrt[4]{160000} = \sqrt[4]{20^4} = 20$ g) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

h) $\sqrt[5]{\frac{32}{100000}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{10}\right)^5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ i) $\sqrt[3]{\frac{343}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{6}\right)^3} = \frac{7}{6}$

j) $\sqrt[7]{7^7} = 7$

k) $\sqrt{3^0+3^1+3^2+3^3+3^4} = \sqrt{1+3+9+27+81} = \sqrt{121} = 11$

l) $\sqrt[6]{1^0+2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5} = \sqrt[6]{1+1+2+4+8+16+32} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

---

2. Ermittle jeweils die maximale Defintionsmenge über $G = \mathbb{R}$ und die Lösungsmenge L der Gleichung.

a) $D = \mathbb{R}$

$$x^3 = 9 + \frac{2}{3}x^3 \quad \Big| \; -\frac{2}{3}x^3$$

$$\frac{1}{3}x^3 = 9 \quad \Big| \cdot 3 \quad x^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3 \quad L = \left\{3\right\}$$

b) $D = \mathbb{R}_0^+$

$$x^{\frac{3}{2}} = 27 \quad \Rightarrow \quad (x^{\frac{3}{2}})^2 = 27^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 729 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{729} = 9 \quad L = \left\{9\right\}$$

c) $D = \mathbb{R}^+$

$$x^{\frac{4}{3}} = \frac{25}{(\sqrt[3]{x})^2} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = \frac{25}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 5 \vee x = -5 \quad L = \left\{5\right\}, \text{da } -5 \notin D$$

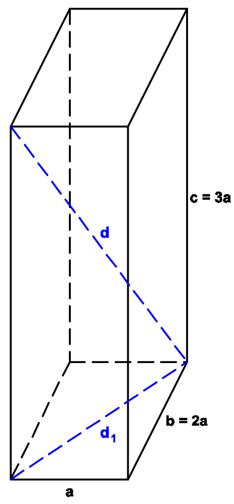
---

3. Ein Quader mit den Kantenlängen a, 2a und 3a hat das Volumen 1 dm^3 296 cm^3.

Ermittle den Oberflächeninhalt dieses Quaders und die Länge d jeder seiner Raumdiagonalen.

Berechne das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge d.

Wieviel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Quadervolumen ?



Bedingung :

$$a \cdot 2a \cdot 3a = 1296 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 6a^3 = 1296 \text{ cm}^2$$

$$a^3 = 216 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 6 \text{ cm}$$

Länge : $a = 6$ cm Breite : $b = 12$ cm Höhe : $c = 18$ cm

Oberflächeninhalt :

Formel : $O = 2ab + 2ac + 2bc$

$$O = 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 12\text{cm} + 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 18\text{cm} + 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 18\text{cm} = 792 \text{ cm}^2$$

Länge d der Raumdiagonalen :

$$d^2 = d_1{}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{(6\text{cm})^2 + (12\text{cm})^2 + (18\text{cm})^2} = \sqrt{36\text{cm}^2 + 144\text{cm}^2 + 324\text{cm}^2} = \sqrt{504} \text{ cm} = 6\sqrt{14} \text{ cm}$$

Volumen des Würfels mit der Kantenlänge d :

$$V_W = d^3 \quad \Rightarrow \quad V = (6\sqrt{14} \text{ cm})^3 = 6^3 \cdot (\sqrt{14})^3 \text{ cm}^3 = 216 \cdot 14 \cdot \sqrt{14} \text{ cm}^3 = 3024\sqrt{14} \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_Q}{V_W} = \frac{1296 \text{ cm}^3}{3024\sqrt{14} \text{ cm}^3} = \frac{3}{7\sqrt{14}} \approx 11\%$$

---

4. Schreibe jeweils als Wurzel mit möglichst kleinem Wurzelexponenten

a) $25^{-\frac{1}{6}} = (5^2)^{-\frac{1}{6}} = 5^{-\frac{2}{6}} = 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $32^{\frac{2}{3}} = (2^5)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{1024}$

c) $1000000^{\frac{1}{12}} = (10^6)^{\frac{1}{12}} = 10^{\frac{6}{12}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

d) $27000^{\frac{1}{9}} = (30^3)^{\frac{1}{9}} = 30^{\frac{3}{9}} = 30^{\frac{1}{3}}$

e) $0{,}04^{-\frac{1}{10}} = 25^{\frac{1}{10}} = (5^2)^{\frac{1}{10}} = 5^{\frac{2}{10}} = 5^{\frac{1}{5}}$

---

5. Vereinfache jede der Wurzeln möglichst weitgehend und gib jeweils vor und nach der Vereinfachung einen auf Hundertstel gerundeten Näherungswert an.

a) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16\cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27\cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[5]{320} = \sqrt[5]{32\cdot 10} = 2\sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81\cdot 6} = 3\sqrt[4]{6}$

e) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt{486} = \sqrt{81\cdot 6} = 9\sqrt{6}$

---

6. Vereinfache jeden der Terme möglichst weitgehend und gib jeweiuls vor und nach der Vereinfachung einen auf Tausendstel gerundeten Näherungswert an.

a) $7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}}$

b) $8^{\frac{8}{3}} : 8^2 = 8^{\frac{8}{3}-2} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $16^{10,5} : 16^{9,75} = 16^{10,5-9,75} = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$

d) $\left(32^{\frac{3}{19}}\right)^{\frac{5}{2}} = 32^{\frac{15}{38}} = (2^5)^{\frac{15}{38}} = 3^{\frac{75}{38}} = 2 \cdot 2^{\frac{37}{38}} = 2\sqrt[38]{2^{37}}$

e) $5^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$

f) $\left[(\sqrt{243})^{\frac{10}{7}}\right]^{\frac{14}{25}} = \left(243^{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7}}\right)^{\frac{14}{25}} = 243^{\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{25}} = 243^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{243})^2 = 3^2 = 9$

g) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 9^{\frac{7}{12}} = (3^2)^{\frac{7}{12}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3^{1+\frac{1}{6}} = 3\sqrt[6]{3}$

h) $\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{0{,}1} = \; = 10^{\frac{1}{5}} \cdot 0{,}1^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} = 1$

i) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} = \; = 4^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$

j) $\sqrt{\sqrt[4]{3}} = (\sqrt[4]{3})^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = (\sqrt{27})^{\frac{1}{3}} = \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

l) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = (2 \cdot \sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

m) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

n) $\left(\frac{2}{3} : \frac{9}{12}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

o) $\left(\sqrt{2} : \sqrt{32}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\sqrt{\frac{1}{16}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = (2^{-2})^{\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{1}{3}}$

p) $\left[\left(30\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{121}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{2} = 5{,}5$

7. Forme jeweils so um, dass kein Nenner mit Wurel bleibt.

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

b) $\frac{10}{\sqrt[5]{16}} = \frac{10}{2^{\frac{4}{5}}} = \frac{10 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}} = \frac{10\sqrt[5]{2}}{2} = 5\sqrt[5]{2}$

c) $\frac{4}{\sqrt{2}+1} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2-1} = 4\sqrt{2} - 4$

d) $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2} = 3\sqrt[4]{8}$

e) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$

f) $\frac{4}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{4}{(2x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4 \cdot (2x)^{\frac{2}{3}}}{(2x)^{\frac{1}{3}} \cdot (2x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4\sqrt[3]{(2x)^2}}{2x} = \frac{2\sqrt[3]{4x^2}}{x}$

---

8. Finde jeweils die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

b) $y^5 = 10^{10} \quad \Rightarrow \quad y = 10^2 = 100$

c) $\sqrt[5]{3z} = 6 \quad \Rightarrow \quad 3z = 6^5 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{6^5}{3} = 2592$

d) $y^4 = \sqrt{256} \quad \Rightarrow \quad y^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt[4]{16} \vee y = \sqrt[4]{16} \quad \Rightarrow \quad y = -2 \vee y = 2$

e) $x^2 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = 4$

---

9. Übertrage jeweils die Gleichung in dein Heft und ersetze dort den Platzhalter so, dass eine wahre Ausssage entsteht.

a) $\frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ b) $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ c) $\frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ d) $\frac{4}{9} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\frac{4}{9} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

---

10. Gib sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl an. die

a) größer als $\sqrt[3]{2}$ ist .

$\frac{3}{2} > \sqrt[3]{2}$ und $\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$

b) kleiner als $-\sqrt{0{,}5}$ ist.

$-0{,}5 < -\sqrt{0{,}5}$ und $-\sqrt{2} < -\sqrt{0{,}5}$

c) größer als $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ist.

$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ und $\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

---

11. Gib jeweils mindestens zwei nichtnegative rationale Zahlen x an, für die gilt :

a) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$: $x = 0, x = 1$

b) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$: $x = 2, x = 3$

c) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$

d) $x^2 > \sqrt{x}$: $x = 2, x = 3$

e) $x^2 \le \sqrt{x}$: $x = \frac{1}{2}, x = 1$

f) $x^2 > \sqrt{2x}$: $x = 3, x = 4$
