

Kann ich das ?

1. Berechne jeweils den Wert des Terms ohne Verwendung des Taschenrechners

$$\text{a) } \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \quad \text{b) } \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \quad \text{c) } \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^2 = 4 \quad \text{e) } \sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{20^3} = 20$$

$$\text{f) } \sqrt[4]{160000} = \sqrt[4]{20^4} = 20 \quad \text{g) } \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$$

$$\text{h) } \sqrt[5]{\frac{32}{100000}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{10}\right)^5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{i) } \sqrt[3]{\frac{343}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{6}\right)^3} = \frac{7}{6}$$

$$\text{j) } \sqrt[7]{7^7} = 7$$

$$\text{k) } \sqrt{3^0+3^1+3^2+3^3+3^4} = \sqrt{1+3+9+27+81} = \sqrt{121} = 11$$

$$\text{l) } \sqrt[6]{1^0+2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5} = \sqrt[6]{1+1+2+4+8+16+32} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

2. Ermittle jeweils die maximale Definitionsmenge über $G = \mathbb{R}$ und die Lösungsmenge L der Gleichung.

a) $D = \mathbb{R}$

$$x^3 = 9 + \frac{2}{3}x^3 \quad \left| -\frac{2}{3}x^3 \right.$$

$$\frac{1}{3}x^3 = 9 \quad \left| \cdot 3 \right. \quad x^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3 \quad L = \{3\}$$

b) $D = \mathbb{R}_0^+$

$$x^{\frac{3}{2}} = 27 \quad \Rightarrow \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 27^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 729 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{729} = 9 \quad L = \{9\}$$

c) $D = \mathbb{R}^+$

$$x^{\frac{4}{3}} = \frac{25}{(\sqrt[3]{x})^2} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = \frac{25}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \vee x = -5 \quad L = \left\{ 5 \right\}, \text{ da } -5 \notin D$$

3. Ein Quader mit den Kantenlängen a , $2a$ und $3a$ hat das Volumen $1 \text{ dm}^3 \ 296 \text{ cm}^3$.

Ermittle den Oberflächeninhalt dieses Quaders und die Länge d jeder seiner Raumdiagonalen.

Berechne das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge d .

Wieviel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Quadervolumen ?

Bedingung :

$$a \cdot 2a \cdot 3a = 1296 \text{ cm}^3 \Rightarrow 6a^3 = 1296 \text{ cm}^3$$

$$a^3 = 216 \text{ cm}^3 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Länge : } a = 6 \text{ cm} \quad \text{Breite : } b = 12 \text{ cm} \quad \text{Höhe : } c = 18 \text{ cm}$$

Oberflächeninhalt :

$$\text{Formel : } O = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$O = 2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} + 2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} + 2 \cdot 12 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} = 792 \text{ cm}^2$$

Länge d der Raumdiagonalen :

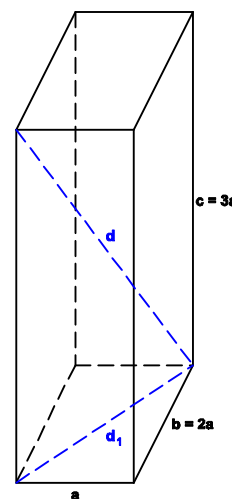
$$d^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 + (18 \text{ cm})^2} = \sqrt{36 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2 + 324 \text{ cm}^2} = \sqrt{504} \text{ cm} = 6\sqrt{14} \text{ cm}$$

Volumen des Würfels mit der Kantenlänge d :

$$V_W = d^3 \Rightarrow V = (6\sqrt{14} \text{ cm})^3 = 6^3 \cdot (\sqrt{14})^3 \text{ cm}^3 = 216 \cdot 14 \cdot \sqrt{14} \text{ cm}^3 = 3024\sqrt{14} \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_Q}{V_W} = \frac{1296 \text{ cm}^3}{3024\sqrt{14} \text{ cm}^3} = \frac{3}{7\sqrt{14}} \approx 11\%$$



4. Schreibe jeweils als Wurzel mit möglichst kleinem Wurzelexponenten

$$\text{a) } 25^{-\frac{1}{6}} = (5^2)^{-\frac{1}{6}} = 5^{-\frac{2}{6}} = 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\text{b) } 32^{\frac{2}{3}} = (2^5)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{1024}$$

$$\text{c) } 1000000^{\frac{1}{12}} = (10^6)^{\frac{1}{12}} = 10^{\frac{6}{12}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\text{d) } 27000^{\frac{1}{9}} = (30^3)^{\frac{1}{9}} = 30^{\frac{3}{9}} = 30^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{e) } 0,04^{-\frac{1}{10}} = 25^{\frac{1}{10}} = (5^2)^{\frac{1}{10}} = 5^{\frac{2}{10}} = 5^{\frac{1}{5}}$$

5. Vereinfache jede der Wurzeln möglichst weitgehend und gib jeweils vor und nach der Vereinfachung einen auf Hundertstel gerundeten Näherungswert an.

$$\text{a) } \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{320} = \sqrt[5]{32 \cdot 10} = 2\sqrt[5]{10}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81 \cdot 6} = 3\sqrt[4]{6}$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\text{f) } \sqrt{486} = \sqrt{81 \cdot 6} = 9\sqrt{6}$$

6. Vereinfache jeden der Terme möglichst weitgehend und gib jeweils vor und nach der Vereinfachung einen auf Tausendstel gerundeten Näherungswert an.

$$\text{a) } 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}}$$

$$\text{b) } 8^{\frac{8}{3}} : 8^2 = 8^{\frac{8}{3} - 2} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\text{c) } 16^{10,5} : 16^{9,75} = 16^{10,5 - 9,75} = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$$

$$d) (32^{\frac{3}{19}})^{\frac{5}{2}} = 32^{\frac{15}{38}} = (2^5)^{\frac{15}{38}} = 2^{\frac{75}{38}} = 2 \cdot 2^{\frac{37}{38}} = 2^{\frac{38}{38}} \sqrt[38]{2^{37}}$$

$$e) 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$f) \left[(\sqrt[5]{243})^{\frac{10}{7}} \right]^{\frac{14}{25}} = (243^{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7}})^{\frac{14}{25}} = 243^{\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{25}} = 243^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{243})^2 = 3^2 = 9$$

$$g) \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 9^{\frac{7}{12}} = (3^2)^{\frac{7}{12}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3^{1 + \frac{1}{6}} = 3 \sqrt[6]{3}$$

$$h) \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{0,1} = 10^{\frac{1}{5}} \cdot 0,1^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} = 1$$

$$i) \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} = 4^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

$$j) \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = (\sqrt[4]{3})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$$

$$k) \sqrt[3]{\sqrt[2]{27}} = (\sqrt[2]{27})^{\frac{1}{3}} = (27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$l) \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = (2 \cdot \sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$m) \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} \quad n) \left(\frac{2}{3} : \frac{9}{12}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$o) (\sqrt{2} : \sqrt[3]{32})^{\frac{1}{6}} = \left(\sqrt{\frac{1}{16}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = (2^{-2})^{\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$p) \left[\left(30 \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{121}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{2} = 5,5$$

7. Forme jeweils so um, dass kein Nenner mit Wurel bleibt.

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\text{b) } \frac{10}{\sqrt[5]{16}} = \frac{10}{2^{\frac{4}{5}}} = \frac{10 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{4}{5} \cdot 2^{\frac{1}{5}}}} = \frac{10 \sqrt[5]{2}}{2} = 5 \sqrt[5]{2}$$

$$\text{c) } \frac{4}{\sqrt{2}+1} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2-1} = 4\sqrt{2} - 4$$

$$\text{d) } \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}}{2^{\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2} = 3 \sqrt[4]{8}$$

$$\text{e) } \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}}} = \frac{2 \sqrt[3]{x}}{x}$$

$$\text{f) } \frac{4}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{4}{(2x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4 \cdot (2x)^{\frac{2}{3}}}{(2x)^{\frac{1}{3} \cdot (2x)^{\frac{2}{3}}}} = \frac{4 \sqrt[3]{(2x)^2}}{2x} = \frac{2 \sqrt[3]{4x^2}}{x}$$

8. Finde jeweils die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\text{a) } x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \qquad \text{b) } y^5 = 10^{10} \Rightarrow y = 10^2 = 100$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{3z} = 6 \Rightarrow 3z = 6^5 \Rightarrow z = \frac{6^5}{3} = 2592$$

$$\text{d) } y^4 = \sqrt{256} \Rightarrow y^4 = 16 \Rightarrow y = -\sqrt[4]{16} \vee y = \sqrt[4]{16} \Rightarrow y = -2 \vee y = 2$$

$$\text{e) } x^2 = 2^x \Rightarrow x = 2 \vee x = 4$$

9. Übertrage jeweils die Gleichung in dein Heft und ersetze dort den Platzhalter so, dass eine wahre Aussage entsteht.

$$\text{a) } \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \qquad \text{b) } \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{c) } \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \qquad \text{d) } \frac{4}{9} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e) \frac{4}{9} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

10. Gib sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl an, die

a) größer als $\sqrt[3]{2}$ ist .

$$\frac{3}{2} > \sqrt[3]{2} \text{ und } \sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$$

b) kleiner als $-\sqrt{0,5}$ ist.

$$-0,5 < -\sqrt{0,5} \text{ und } -\sqrt{2} < -\sqrt{0,5}$$

c) größer als $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ist.

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \text{ und } \sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

11. Gib jeweils mindestens zwei nichtnegative rationale Zahlen x an, für die gilt :

a) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} : x = 0, x = 1$

b) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} : x = 2, x = 3$

c) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} : x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$

d) $x^2 > \sqrt{x} : x = 2, x = 3$

e) $x^2 \leq \sqrt{x} : x = \frac{1}{2}, x = 1$

f) $x^2 > \sqrt{2x} : x = 3, x = 4$
