Zusammengesetzte Zufallsexperimente - Baumdiagramme und Pfadregeln

==

Ein Zufallsexperiment heißt zusammegesetzt, wenn es es die Kombination mehrerer Zufalls-experimente ist.

► mehrmaliges Werfen einer Münzen

► gleichzeitiges Werfen eines Würfels und einer Münze

► mehrmaliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit und ohne Zurücklegen

► Eine Laplace-Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Wie groß ist die W'keit von

A : Man wirft dreimal "Kopf"

B : Man wirft zweimal "Kopf"

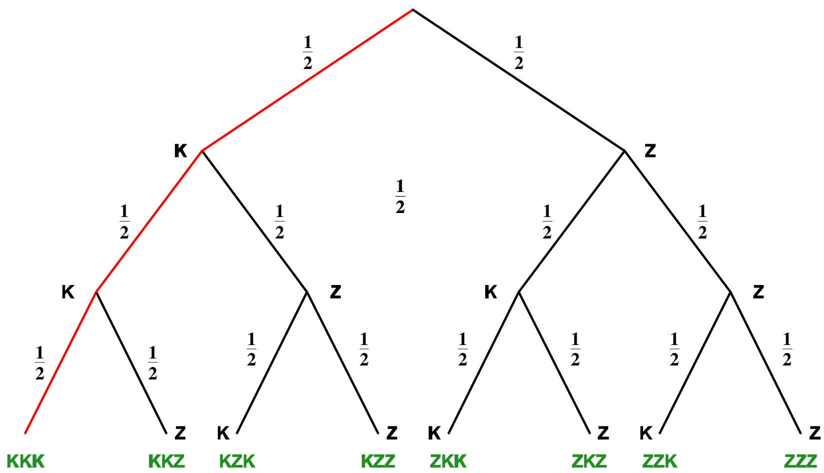
$$\Omega = \left\{ ZZZ, ZZK, ZKZ, KZZ, ZKK, KZK, KKZ, KKK \right\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 8$$

$$A = \left\{ KKK \right\} \quad \Rightarrow \quad |A| = 1$$

$$B = \left\{ KKZ, KZk, ZKK \right\} \quad \Rightarrow \quad |B| = 3$$

Also $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$ und $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$

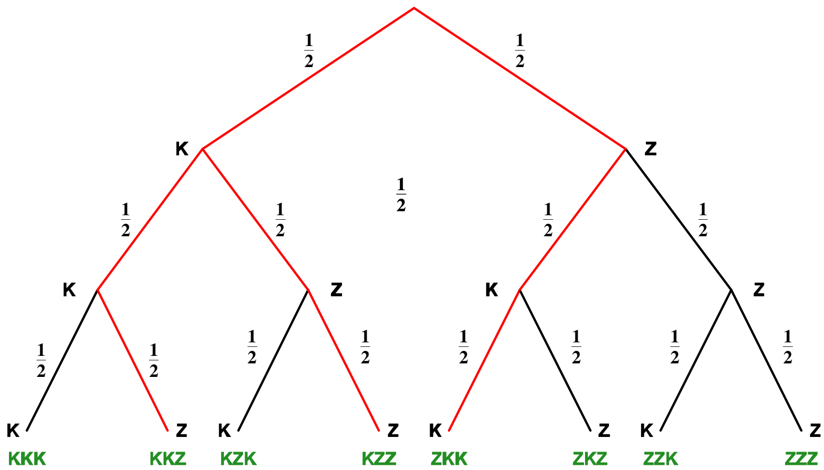
Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zusammengesetzter Zufallsexperimente lassen sich sich auch mit Hilfe von Baumdiagrammen berechnen. Die Berechnungen folgen aus dem Zählprinzip.



Zu Beginn und nach jedem Wurf beträgt die W'keit "Kopf" oder "Zahl" zu werfen $\frac{1}{2}$.

Daher gilt $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Das Ereignis B enthält drei Ergebnisse; zu jedem Ergenis führt ein Pfad.



Es ist also

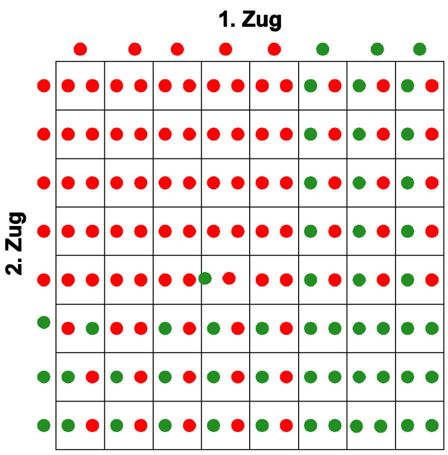
$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

► In einer Urne sind drei rote und 5 grüne Kugeln. Es wird zweimal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen entnommen.

Wie groß ist die W'keit von

A : Man zieht zwei gleichfarbige Kugeln.

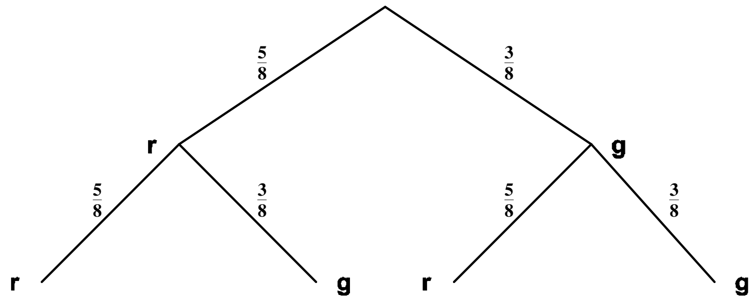
B : Man zieht zwei verschiedenenfarbige Kugeln.



Dem Diagramm entnimmt man

$$P(A) = \frac{5 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{8 \cdot 8} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32} \text{ und } P(B) = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 5}{8 \cdot 8} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

Mit einem Baumdiagramm ergibt sich



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{17}{32} \text{ und } P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{32}$$

Beachte :

B ist das Gegenereignis von A. Deshalb ist $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$.

► In einer Urne sind drei rote und 5 grüne Kugeln. Es wird zweimal hintereinander eine Kugel ohne Zurücklegen entnommen.

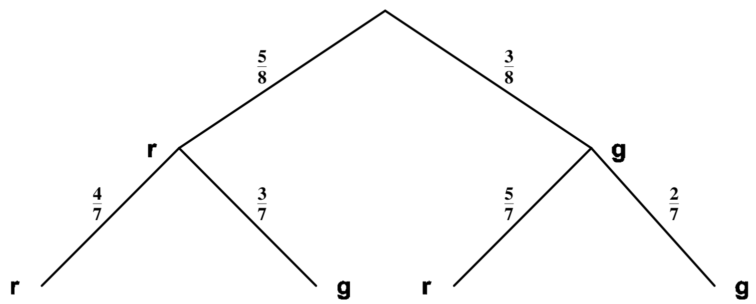
Wie groß ist die W'keit von

A : Man zieht zwei gleichfarbige Kugeln.

B : Man zieht zwei verschiedenenfarbige Kugeln.

Diemal hängt die W'keit beim 2. Zug eine rote oder grüne Kugel zu ziehen vom Ergebnis des 1. Zugs ab.

Es ergibt sich



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{28} \text{ und } P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

Zusammengefasst :

- Einen zu einem Ergebnis führenden Weg im Baumdiagramm bezeichnet man als Pfad.

- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnis zu erzielen ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten (1. Pfadregel oder Produktregel).

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfade, die zum dem Ereignis führen (2. Pfadregel oder Summenregel).

Vielfach kann man das Baumdiagramm vereinfacht zeichnen oder auch ganz weglassen.

► Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechne die W'keiten von

A : Alle Augenzahlen sind voneinander verschieden

B : Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich

C : Es wird einmal die Augenzahl 1 geworfen.

D : Es zweimal die Augenzahl 2 geworfen

E : Keine Augenzahl ist größer als 4

F : Die Summe der Augenzahlen ist 6

G : Das Produkt der Augenzahlen ist 6

Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$.

Anzahl der Pfade, die zum Ereignis A führen : $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

Das Ereignis B ist das Gegenereignis von A : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

Anzahl der Pfade, die zum Ereignis C führen : $4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{125}{324}$

Begründung :

Die Augenzahl 1 kann beim 1., 2., 3. oder 4. Wurf gewürfelt werden.

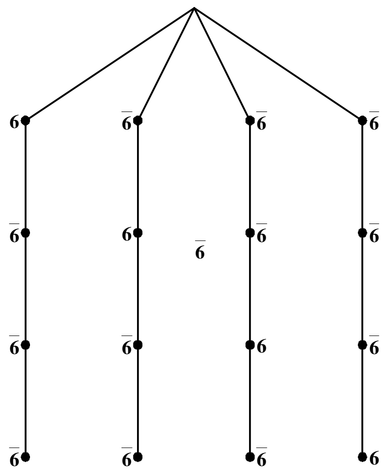
Es gibt fünf Möglichkeiten keine 1 zu würfeln

Alternative :

Symbolische Darstellung : $1\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\;,\;\overline{1}\,1\,\overline{1}\,\overline{1}\;,\;\overline{1}\,\overline{1}\,1\,\overline{1}\;,\;\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\,1$

Damit ergibt sich $P(C) \;=\; \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} \;+\; \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{5} \;+\; \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} \;+\; \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \;=\; \frac{125}{324}$

Verkürztes Baumdiagramm :



Symbolische Darstellung : $2\,2\,\overline{2}\,\overline{2}\;,\;2\,\overline{2}\,2\,\overline{2}\;,\;2\,\overline{2}\,\overline{2}\,2\;,\;\overline{2}\,2\,2\,\overline{2}\;,\;\overline{2}\,2\,\overline{2}\,2\;,\;\overline{2}\,\overline{2}\,2\,2$

Damit ergibt sich $P(D) \;=\; 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} \;=\; \frac{25}{216}$

Anzahl der Pfade, die zum Ereignis e führen : $4\cdot4\cdot4\cdot4 \;=\; 256 \quad\Rightarrow\quad P(e) \;=\; \frac{16}{81}$

Symbolische Darstellung : $6 \;=\; \underbrace{3+1+1+1}_{\text{4 Möglichkeiten}} \;=\; \underbrace{2+2+1+1}_{\text{6 Möglichkeiten}} \quad\Rightarrow\quad P(F) \;=\; \frac{10}{1296} \;=\; \frac{5}{628}$

Symbolische Darstellung : $6 \;=\; \underbrace{6\cdot1\cdot1\cdot1}_{\text{4 Möglichkeiten}} \;=\; \underbrace{3\cdot2\cdot1\cdot1}_{\text{12 Möglichkeiten}} \quad\Rightarrow\quad P(G) \;=\; \frac{1}{81}$

Aufgaben

---

1. Ein gewöhnlicher Laplace-Würfel wird viermal geworfen. Bestimme die W'keit folgender Ereignisse

   A : Es wird mindestens eine 1 geworfen

   B : Es wird mindestens zweimal eine 6 geworfen

   C : Beim letzten Wurf wird das erstmals eine 5 geworfen

   D : Es werden nur ungerade Augenzahlen geworfen

   E : Das Produkt der gewürfelten Augenzahlen ist 4

   F : Aus den gewürfelten Die aus den

---

2. Hans hat in einen Korb mit 6 gekochten Eiern 4 rohe dazugelegt. Ihre Schwester nimmt für das Frühstück 3 Eier heraus.

   Wie groß ist die W'keit, dass mindestens ein rohes Ei dabei ist ?

---

3. Stelle dir vor, dein Lehrer wirft zwei Würfel und gibt dir als Note die kleinere der Augenzahlen. Wie groß ist die W'keit, dass du eine Eins bekommst ?

---

4. In Deutschland haben 40 % der Einwohner Blutgruppe A. Fünf Personen kommen zur Blutspende. Wie groß ist die W'keit, dass genau zwei Personen Blutgruppe A haben ?

---

5. Hans hat nur 30 % der Vokabeln gelernt. Sein Lehrer fragt ihn 4 Vokabeln ab.

   Wie groß ist die W'keit, dass er mehr als eine Vokabel kennt ?

---

6. Hans behauptet, bei Schokolade blind erkennen zu können, um welche Marke und Sorte es sich handle. In einem Test werden vier Schokoladenproben blind verkostet.

   a) Wie groß ist die W'keit, dass Hans jedesmal die Marke und Sorte richtig erkennt, wenn er eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % hat ?

   b) Wie groß istW'keit, dass man dieses Ergebnis auch erzielen könnte, wenn man keine Kenntnis habe, d.h. wenn man nur geraten hätte. Stimmt das ?

---

7. In einem Multiple-Choice-Test werden 5 Fragen gestellt. zUBei jeder Frage werden 3 Antwortalternativen vorgegeben, und nur eine ist richtig.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man durch bloßes Raten alle Fragen richtig beantwortet?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei Fragen richtig zu beantworten ?
c)Wie lauten die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, wenn man eine Frage mehr stellt ?

---

8. Beim Basketball trifft Peter mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Nach jedem Fehlwurf sinkt seine Trefferwahrscheinlichkeit auf die Hälfte.

   Wie groß ist die W'keit, dass er bei drei Versuchen genau zweimal trifft ?

---

9. Bevor ein Buch gedruckt wird, werden die probeweise gedruckten Seiten auf Fehler durchgesehen. Der erste Kontrolleur findet erfahrungsgemäß 70% der Fehler und korrigiert sie.

   Bei den nächsten beiden Kontrollen werden (von den jeweils übriggebliebenen Fehlern) 50% bzw. 40% entdeckt.

   a) Mit welcher W'keit ist ein Fehler, der ursprünglich in einem Drucktext vorhanden war, auch nach diesen drei Kontrollen noch nicht entdeckt ?

   b) Macht es Sinn, so lange zu kontrollieren, bis 99 % aller ursprünglichen Fehler entdeckt worden sind ?

   Nimm dazu an, dass bei jeder weiteren Kontrolle 40% der jeweils übrig gebliebenen Fehler entdeckt werden.

---

10. In der Tüte von Kathrin befinden sich vier rote, fünf blaue und zwei grüne Gummibärchen. Sie zieht ohnehinzusehen zwei Stück, um anschließend die Bärchen zu essen.

    Wie groß ist die W'keit, dass Kathrin

    a) die zwei grünen erwischt,

    b) kein blaues erwischt,

    c) verschiedene Farben erwischt ?

---

11. In einer Urne liegen 4 schwarze, 6 blaue und 2 grüne Kugeln. Zwei werden mit einem Griff gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie gleichfarbig ?

---

12. Alfred und Bruno spielen Tischtennis, wobei Alfred einen Satz mit der W'keit 0,4 gewinnt. Wer zuerst zwei Sätze gewonnen hat, ist Sieger.

    Mit welcher W'keit ist es Alfred ?

---

13. Mit welcher W'keit erhält man bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs?

---

14. Sophie wirft einen regulären Spielwürfel dreimal hintereinander. Mit welcher W'keit ist das Produkt der drei geworfenen Augenzahlen gerade?
