Gebrochenrationale Funktionen - Bruchterme - Bruchgleichungen - Formeln

==

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{2x-3}{1-x}$ mit der maximalen Defintionsmenge D.

   a) Bestimme D und gib die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

   b) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x- und mit der y-Achse.

   c) Lege eine Wertetabelle an und zeichne den Graphen von f für $-6 \le x \le 6$

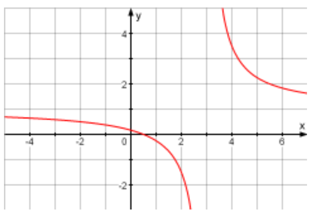
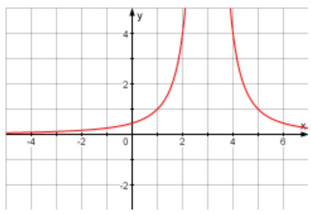
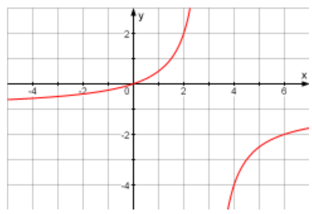
   d) Der Punkt $P\left(p \mid -12\right)$ liegt auf dem Graphen von f. Bestimme p.

---

2. Gegeben sind die Funktion f_i mit $i = 1, 2, 3, 4, 5$ und den Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{-x}{x-3},\ f_2(x) = \frac{4}{(x-3)^2},\ f_3(x) = \frac{-2}{(x-3)^2},\ f_4(x) = \frac{x}{x-3} \text{ und } f_5(x) = \frac{2x-1}{2\cdot(x-3)}$$

   Welcher Funktionsterm gehört zu welchem Graphen ?

   Begründe deine Auswahl !

---

3. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{2x^2}{x^2+1}$ mit der maximalen Defintionsmenge D.

   a) Gib D und die Gleichung der waagrechten Asymptoten des Graphen von f an.

   b) Zeichne den Graphen von f für $-6 \le x \le 6$

---

4. Gegeben ist die Funktion $f: f: x \to \frac{ax}{bx+c}$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{Q}\backslash\{-1{,}5\}$.

   Der Graph der Funktion hat die horizontale Asymptote $y = 2$ und geht durch den Punkt $P\left(-3 \mid 4\right)$. Bestimme a, b und c.

---

5. Zeichne die Graphen der Funktionen $f: x \to \frac{2}{1-x}$ und $h: x \to \frac{1}{x}$ und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunkts.

6. Kürze soweit wie möglich

a) $f(x) = \frac{6x^2 - 4x}{10 - 15x}$ b) $f(x) = \frac{(3x+3)^2}{4x^2 + 4x}$ c) $f(x) = \frac{2 + 2x}{2x}$

---

7. Zeige , dass die Punkte auf dem Graphen der Funktion $f : x \to \frac{x^2 - 2x}{4 - 2x}$ alle auf einer Geraden liegen und zeichne den Graphen der Funktion.

---

8. Fasse zusammen

a) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{6x^2} - \frac{3}{4x}$ b) $\frac{3 + x}{x} - \frac{x}{x - 3}$ c) $\frac{x}{x - 4} - \frac{2x}{12 - 3x}$ d) $\frac{x - 1}{x^2} - \frac{1}{x}$

e) $\frac{x - 1}{x} - \frac{x}{x - 1}$ f) $\frac{2}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2}$ g) $\frac{4x + 3}{2x} - \frac{4x + 4}{2x + 3}$

---

9. Vereinfache

a) $\frac{3x + 1}{4x} \cdot \frac{8x}{12 + 4}$ b) $\frac{15x^2 - 3x}{8} : \frac{2 - 10x}{6x}$ c) $\frac{2x - 1}{8x^2} \cdot \frac{x}{12x - 6}$ d) $\frac{x^2 - 1}{x} : \frac{x^2 + x}{x - 1}$

e) $\frac{2x^2 + 4x + 2}{3x} \cdot \frac{8x^2}{3x + 3}$ f) $\frac{3x}{x + 2} \cdot \frac{2 - x}{x^2 - 2x}$ g) $\frac{x^2}{2x + 2} \cdot \left(\frac{x + 1}{3x}\right)^2$ h) $\frac{x - 1}{x} : \frac{1}{x}$

---

10. Vereinfache

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} : \frac{x - 1}{x + 1}$ b) $\left(\frac{1}{2x} - \frac{4}{3x}\right) : \frac{1}{x^2}$ c) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

---

11. Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$

a) $\frac{6}{x} - 5 = 4$ b) $\frac{3}{x} + \frac{1}{3} = \frac{5}{x} + \frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{2x - 3} = \frac{3}{2x + 1}$

---

12. Bestimme die Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$

a) $\frac{x + 1}{x - 3} = \frac{x + 4}{x - 1}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 1}$ c) $\frac{1}{x - 3} - \frac{2x}{x + 2} + 2 = 0$

d) $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}$ e)n $\frac{2}{x - 2} + \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{6 + 2x} - \frac{3}{6 - 3x}$

---

13. Löse die Formel bzw. Gleichung nach x auf.

a) $ax - 1 = x$ b) $\frac{x}{x + 1} = a$ c) $\frac{x}{x + 1} = y$ d) $\frac{x - a}{x + a} = \frac{x + a}{x}$

Lösung

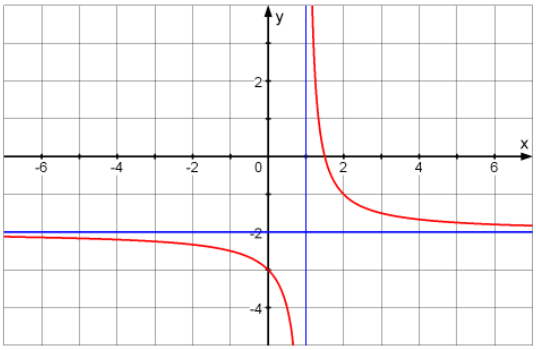
==

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \dfrac{2x-3}{1-x}$ mit der maximalen Defintionsmenge D.

a) $D = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ und $y = -2$

b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{1-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{2} \quad S_x\left(1{,}5;\ 0\right)$

$f(0) = \dfrac{2\cdot 0-3}{1-0} = -3 \quad S_y\left(0;\ -3\right)$

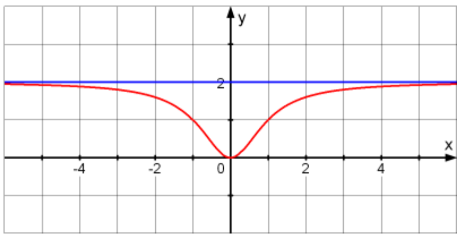


d) $\dfrac{2p-3}{1-p} = -12 \quad \Rightarrow \quad 2p-3 = -12+12p \quad \Rightarrow \quad 9 = 10p \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}9$Der Punkt

----

4. a) $D = \mathbb{Q}$ und $y = 2$.

b)



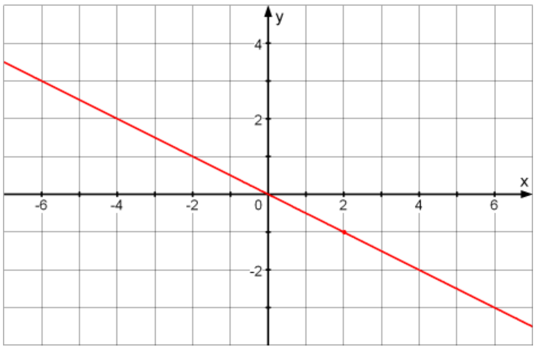
7.a) $f(x) = \dfrac{6x^2-4x}{10-15x} = \dfrac{2x\cdot(3x-2)}{-5\cdot(3x-2)} = -\dfrac{2}{5}x$

b) $f(x) = \dfrac{(3x+3)^2}{4x^2+4x} = \dfrac{9\cdot(x+1)^2}{4x\cdot(x+1)} = \dfrac{9\cdot(x+1)}{4x}$

c)$f(x) = \dfrac{2+2x}{2x} = \dfrac{2\cdot(1+x)}{2x} = \dfrac{1+x}{x}$

8.a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{4-2x} = \dfrac{x\cdot(x-2)}{-2\cdot(x-2)} = -\dfrac{2}{2}$

d.h. alle Punkte des Graphen von f liegen auf der Geraden $y = -\frac{1}{2}x$.



9.a) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{6x^2} - \frac{3}{4x} = \frac{8x}{12x^2} + \frac{2}{12x^2} - \frac{9x}{12x^2} = \frac{2-x}{12x^2}$

b) $\frac{3+x}{x} - \frac{x}{x-3} = \frac{(3+x)(x-3)}{x\cdot(x-3)} - \frac{x^2}{x\cdot(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)-x^2}{x\cdot(x-3)} =$

$= \frac{-9}{x\cdot(x-3)} = \frac{9}{x\cdot(3-x)}$

c) $\frac{x}{x-4} - \frac{2x}{12-3x} = \frac{x}{x-4} - \frac{2x}{-3\cdot(x-4)} = \frac{x}{x-4} + \frac{2x}{3\cdot(x-4)} =$

$= \frac{3x}{3\cdot(x-4)} + \frac{2x}{3\cdot(x-4)} = \frac{5x}{3\cdot(x-4)}$

d) $\frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

e) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x\cdot(x-1)} - \frac{x^2}{x\cdot(x-1)} = \frac{x^2+2x+1-x^2}{x\cdot(x-1)} = \frac{2x+1}{x\cdot(x-1)}$

f) $\frac{2}{x^2-x} - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x\cdot(x-1)} - \frac{2}{x^2} = \frac{2x}{x^2\cdot(x-1)} - \frac{2\cdot(x-1)}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{2x-2x+2}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{2}{x^2\cdot(x-1)}$

g) $\frac{4x+3}{2x} - \frac{4x+4}{2x+3} = \frac{(4x+3)(2x+3)}{2x\cdot(2x+3)} - \frac{(4x+4)\cdot 2x}{2x\cdot(2x+3)} = \frac{12x+9}{2x\cdot(2x+3)}$

----

10. a) $\frac{3x+1}{4x}\cdot\frac{8x}{12x+4} = \frac{3x+1}{4x}\cdot\frac{8x}{4\cdot(3x+1)} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{15x^2-3x}{8} : \frac{2-10x}{6x} = \frac{3x\cdot(5x-1)}{8}\cdot\frac{6}{-2\cdot(5x-1)} = -\frac{9}{9}x$

c) $\frac{2x-1}{8x^2}\cdot\frac{x}{12x-6} = \frac{2x-1}{8x^2}\cdot\frac{x}{6\cdot(2x-1)} = \frac{1}{48x}$

d) $\frac{x^2-1}{x} : \frac{x^2+x}{x-1}$

e) $\frac{2x^2+4x+2}{3x}\cdot\frac{8x^2}{3x+3}$ f) $\frac{3x}{x+2}\cdot\frac{2-x}{x^2-2x}$ g) $\frac{x^2}{2x+2}\cdot\left(\frac{x+1}{3x}\right)^2$ h) $\frac{x-1}{x}:\frac{1}{x}$

11\. a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cdot\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x\cdot(x-1)} - \frac{x+1}{x\cdot(x-1)} = \frac{-2}{x\cdot(x-1)} = \frac{2}{x\cdot(1-x}$

b) $\left(\frac{1}{2x} - \frac{4}{3x}\right) : \frac{1}{x^2} = \left(\frac{3}{6x} - \frac{8}{6x}\right)\cdot x^2 = \frac{-5}{6x}\cdot x^2 = -\frac{5}{6}x$

c) $\left(1+\frac{1}{x}\right) : \left(1-\frac{2}{x}\right) = \left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x-2}{x} = \frac{x+1}{x-2}$

12\. a) $\frac{6}{x} - 5 = 4 \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{0\} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{x} = 9 \quad \Rightarrow \quad 6 = 9x \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = x$

b) $\frac{3}{x} + \frac{1}{3} = \frac{5}{x} + \frac{1}{5} \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{0\} \;\Big|\; \cdot 15x$

$45 + 5x = 75 + 3x \quad \Rightarrow \quad 2x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 15$

c) $\frac{4}{2x-3} = \frac{3}{2x+1} \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{-0{,}5: 1{,}5\} \;\Big|\; \cdot(2x-3)\cdot(2x+1)$

$8x + 4 = 6x - 9 \quad \Rightarrow \quad 2x = -13 \quad \Rightarrow \quad x = -6{,}5$

13.a) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+4}{x-1} \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{1; 3\} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-1) = (x+4)(x-3)$

$\Rightarrow \quad x^2 - x + x - 1 = x^2 - 3x + 4x - 12 \quad \Rightarrow \quad -1 = x$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1} \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{-1; 0; 1\} \;\Big|\; \cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$(x-1)\cdot(x+1) + x\cdot(x-1) = x\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 + x^2 - x = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad -1 = 0$

Widerspruch ! Es gibt keine Lösung !

c) $\frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x+2} + 2 = 0 \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-2; 3\} \;\Big|\; \cdot(x-3)\cdot(x+3)$

$x+2-2x\cdot(x-3)+2\cdot(x+2)\cdot(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2-2x^2+6x+2x^2-6x+4x-12 = 0$

$5x-14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}8$

d) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{0; 1\} \;\Big|\; \cdot x^2\cdot(x-1)$

$x^2-2\cdot(x-1) = x\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad -2x+1 = -x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2}{x-2} + \frac{4}{x+3} = \frac{1}{6+2x} - \frac{3}{6-3x} \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-3; 2\} \;\Big|\; 12\cdot(x-2)(x+3)$

$24\cdot(x+3)+48\cdot(x-2) = 6\cdot(x-2)+12\cdot(x+3) \quad \Rightarrow \quad 54x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}$

---

13. a) $ax-1 = x \Rightarrow ax-x = 1 \Rightarrow x\cdot(a-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a-1}$

b) $\frac{x}{x+1} = a \Rightarrow x = a\cdot(x+1) \Rightarrow x = ax+a \Rightarrow x-ax = a$

$\Rightarrow x\cdot(1-a) = a \Rightarrow x = \frac{a}{1-a}$

c) $\frac{x}{x+1} = y \Rightarrow x = xy+y \Rightarrow x-xy = y \Rightarrow x\cdot(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$

d) $\frac{x-a}{x+a} = \frac{x+a}{x} \Rightarrow x^2-ax = x^2+2ax+a^2 \Rightarrow -3ax = a^2 \Rightarrow x = -\frac{a}{3}$
