Wahrscheinlichkeit

===

1. In den Spielregeln für ein Würfelspiel steht :

"Man werfe beide Würfel und bilde aus den beiden oben liegenden Augenzahlen die größtmögliche Zahl."

Beispiel : Bei den Augenzahlen 2 und 4 ist das die Zahl "42".

a) Gib einen Ergebnisraum für dieses Spiel an.

b) Gib folgende Ereignisse in Mengenschreibweise an und berechne ihre W'keit

A : Die gebildete Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.

B : Die Zahl enthält mindestens eine 4.

C : Die Einerziffer ist halb so groß wie die Zehnerziffer.

D : Die Zahl ist größer als 10.

E : Die Quersumme der Zahl ist 6.

F : Die Zahl ist eine Primzahl.

c) Beschreibe folgende Ereignisse in Worten :

$G = \{11, 21, 22\}$ und $H = \{22, 42, 44, 62, 64, 66\}$

---

2. In einer Urne befinden sich eine weiße, eine schwarze, eine rote und eine blaue Kugel.

Es werden nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln entnommen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm und lies den Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments ab.

b) Ermittle die W'keiten folgender Ereignisse:

A : Keine der gezogenen Kugeln ist rot.

B : Unter den gezogenen Kugeln ist eine rote.

C : Es werden zwei rote Kugeln gezogen.

D : Die gezogenen Kugeln sind weiß und schwarz.

c) Gib in Worten ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 25\%$ und ein Ereignis F mit der Wahrscheinlichkeit $P(F) = \frac{1}{3}$ an.

---

3. Es soll zufällig eine vierstellige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 gebildet werden bei der jede dieser Ziffern nur einmal vorkommt.

   a) Beschreibe den Ablauf eines geeigneten Zufallsexperiments.

   Nun soll zufällig eine vierstellige Zahl aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 gebildet werden, bei der jede der Ziffern mehrmals vorkommen darf.

   d) Beschreibe wieder den Ablauf eines geeigneten Zufallsexperiments.

---

4. Ein Würfel wird zweimal geworfen.

   a) Man berechne die W'keiten folgender Ereignisse:

      A : Zwei gleiche Augenzahlen

      B : Zwei verschiedene Augenzahlen

      C : Genau ein Wurf ergibt Augenzahl 2

      D : Wenigstens ein Wurf ergibt Augenzahl 6

      E : Erster oder zweiter Wurf ergibt Augenzahl 6

      F : Augenzahl des ersten Wurfes ist mindestens 4 und Augenzahl des zweiten Wurfes ist kleiner als 3

   b) Betrachte die Ereignisse

      U : Augensumme ist ungerade

      T : Augensumme ist durch drei teilbar.

      Gib U, T, $U \cap T$ und $U \cup T$ des Ergebnisraum an und berechne ihre W'keiten.

      Versuche zwischen den vier W'keiten Zusammenhänge zu entdecken ?

---

5. Eine Münze wird viermal geworfen. Man berechne die W'keiten folgender Ereigniss :

   A : Mindestens einmal K

   B : Genau einmal K

   C : Beim zweiten oder dritten Wurf K

   D : Nicht mehr als einmal K

   E : Jedes Symbol K und Z wenigsten einmal

---

6. Ein L-Würfel wird dreimal hintereinander geworfen.

Berechne die W'keiten von

A : Es werden drei verschiedene Augenzahlen geworfen.

B : Keine Augenzahl wird zweimal hintereinander georfen.

C: Es wird keine Sechs geworfen.

D : Alle erzielten Augenzahlen sind gerade.

E : Die erste geworfene Augenzahl ist auch die größte geworfene Augenzahl.

F : Es werden die Augenzahlen 1, 2 und 3 geworfen.

Lösungen :

==

1. a) $\Omega = \left\{ 11, 21, 22, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 55, 61, 62, 63, 64, 65, 66 \right\}$

b) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{11}{36}$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(D) = 1$

$P(E) = \frac{5}{36}$

$P(F) = \frac{11}{36}$

b) Die Zahl ist kleiner als 21.

Die Zahl besteht nur aus geraden ziffern.

---

2. a) $\Omega = \left\{ ws, sw, wr, rw, wb, bw, sr, rs, sb, bs, rb, br \right\}$

b) $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = 0$ $P(D) = \frac{1}{6}$

---

3. a) Urne mit vier Kugeln, die mit 1, 2, 3 oder 4 beschriftet sind - Ziehen dieser vier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen

b) Es sind $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Ergebnisse möglich.

c) $P(A) = 100\%$

$$|B| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$|C| = \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}^{\text{letzte Ziffer 2}} + \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}^{\text{letzte Ziffer 4}} = 12 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$\overline{D}$: Die Zahl ist kleiner oder gleich 1300

$$|\overline{D}| = \overbrace{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}^{12....} = 2 \quad \Rightarrow \quad P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{2}{24} = \frac{11}{12} \approx 91{,}7\%$$

d) Urne mit vier Kugeln, die mit 1, 2, 3 oder 4 beschriftet sind - Ziehen von vier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen

e) Es sind $4^4 = 256$ Ergebnisse möglich.

f) $\overline{E}$: Die Zahl enthält keine 2

$$|\overline{E}| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad \Rightarrow \quad P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{81}{256} \approx 68{,}4\%$$

$$|F| = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \quad \Rightarrow \quad P(F) = \frac{64}{256} = 25\%$$

$$|G| = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128 \quad \Rightarrow \quad P(G) = \frac{128}{256} = 50\%$$

$\overline{H}$: Die Zahl ist kleiner oder gleich 1400

$$|\overline{H}| = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48 \quad \Rightarrow \quad P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \frac{48}{256} = 81{,}25\ \%$$

---

4. $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36$

a) $|A| = 6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\%$

$$|B| = 6 \cdot 5 = 30 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{30}{36} \approx 83{,}3\%$$

$|C| = 5+5 = 10 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\%$

$\overline{D}$: Keine Sechs $\quad |\overline{D}| = 5 \cdot 5 = 25 \quad \Rightarrow \quad P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\%$

$D = E \quad \Rightarrow \quad P(E) = 30{,}6\%$

$|F| = 3 \cdot 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad P(F) = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\%$

b) $P(U) = \frac{1}{2} \quad P(T) = \frac{1}{3} \quad P(U \cap T) = \frac{1}{6} \quad P(U \cup T) = \frac{2}{3}$

$P(U \cup T) = P(U) + P(T) - P(U \cap T)$

---

5. $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

$\overline{A}$: Nur Z

$|\overline{A}| = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 93{,}75\%$

$|B| = 4 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{4}{16} = 25\%$

$|C| = \overbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}^{..KZ..} + \overbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}^{..ZK..} + \overbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}^{..KK..} = 6 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{6}{16} = 37{,}5$

$|D| = 1+4 = 5 \quad \Rightarrow \quad P(D) = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$

$\overline{E}$: Viermal K oder viermal Z

$|\overline{E}| = 1+1 = 2 \quad \Rightarrow \quad P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8} = 87{,}5\%$

---

6. $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

$|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{120}{216} \approx 55{,}6\%$

$|B| = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{150}{216} \approx 69{,}4\%$

$|C| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{125}{216} \approx 57{,}9\%$

$$|D| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \quad \Rightarrow \quad P(D) = \frac{27}{216} = 12{,}5\%$$

$$|E| = \overbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}^{\text{erste Zahl 1}} + \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 2}^{\text{erste Zahl 2}} + \overbrace{1 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{erste Zahl 3}} + \overbrace{1 \cdot 4 \cdot 4}^{\text{erste Zahl 4}} + \overbrace{1 \cdot 5 \cdot 5}^{\text{erste Zahl 5}} + \overbrace{1 \cdot 6 \cdot 6}^{\text{erste Zahl 6}} = 75$$

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{75}{216} \approx 34{,}7\%$$

$$|F| = 3! = 6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{3!}{216} \approx 2{,}8\%$$
