

## Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

---

---

### Lineare Funktionen

---

- Eine Funktion  $f: x \rightarrow y = mx + t$ ,  $D = D_{\max}$ , mit zwei Zahlen  $m$  und  $t$  heißt eine **lineare Funktion**.



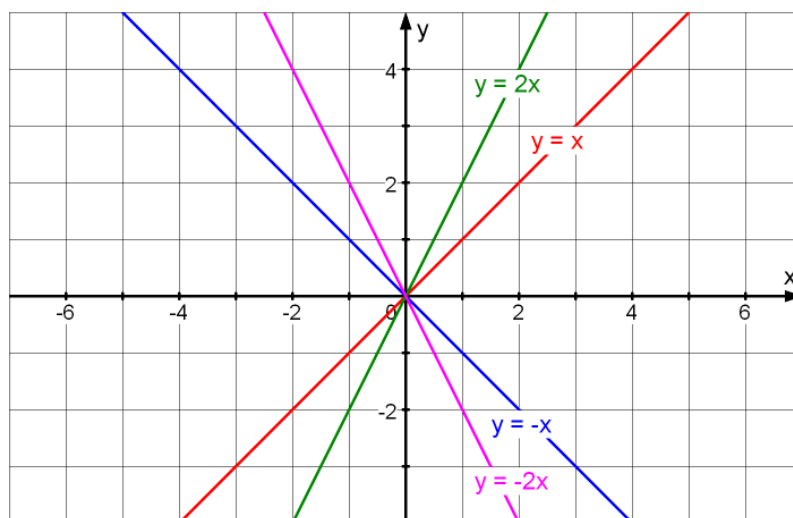
$f: x \rightarrow y = 2x + 1$	$m = 2$ und $t = 1$
$f: x \rightarrow y = x - 2$	$m = 1$ und $t = -2$
$f: x \rightarrow y = -x$	$m = -1$ und $t = 0$
$f: x \rightarrow y = 2$	$m = 0$ und $t = 2$
$f: x \rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$	$m = \frac{1}{2}$ und $t = -1$

- Speziell ergibt sich

$$\boxed{t = 0} : y = mx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m$$

$x$ - und  $y$ -Werte sind direkt proportional zueinander mit dem Proportionalitätsfaktor  $m = \frac{y}{x}$ .

Der Graph der Funktion ist dann eine Gerade durch den Ursprung  $O(0 | 0)$  des Koordinatensystems.



- a)  $m > 0$  : Die Gerade steigt

b)  $m = 0$  : Die Gerade ist identisch mit der x-Achse

c)  $m < 0$  : Die Gerade fällt.

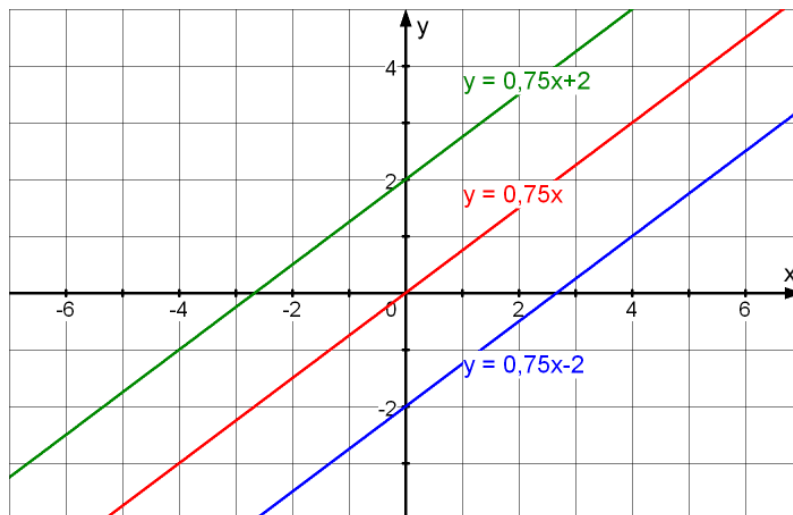
m heißt auch **Steigungsfaktor** der Geraden.

$t \neq 0$

Der Graph der Funktion  $f : x \rightarrow y = mx + t$

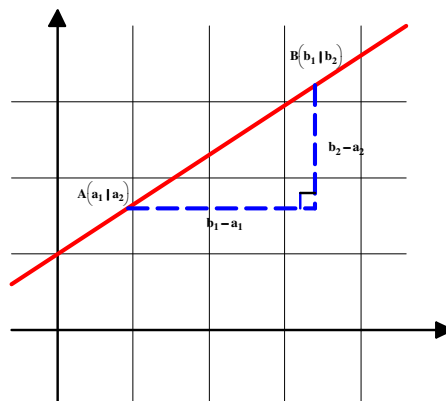
ist dann eine zum Graphen der Funktion  $f : x \rightarrow y = mx$

parallele Gerade durch den Punkt  $S_y(0 | t)$



• heißt **y-Abschnitt** der Geraden.

• Den Steigungsfaktor m einer Geraden kann man mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dem Schaubild der Geraden entnehmen



Sind  $A(a_1 | a_2)$  und  $B(b_1 | b_2)$  die auf der Gerade liegenden Eckpunkte des Steigungsdreiecks, dann ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

$\Delta y = b_2 - a_2$  ist gleich der Zu- oder Abnahme der y-Werte bei einer Zunahme oder Abnahme der x-Werte um  $\Delta x = b_1 - a_1$ .

► Für die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $A(1 | -2)$  und  $B(4 | 2)$  ergibt sich

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{2 - (-2)}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

Also hat Gleichung der Geraden die Form  $y = \frac{4}{3}x + t$ .

Da der Punkt A auf der Geraden liegt, muss sich beim Einsetzen der x-Koordinate des Punktes seine y-Koordinate ergeben. Also

$$-2 = \frac{4}{3} \cdot 1 + t \Rightarrow t = -\frac{10}{3}$$

und damit ergibt sich für die Gerade AB die Gleichung  $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

- Die Funktionsgleichung  $y = mx + t$  einer linearen Funktion nennt man auch explizite Geradengleichung.
- Für einen Punkt  $P_0(x_0 | y_0)$  und eine Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = mx + t$  lassen sich folgende drei Fälle unterscheiden

$y_0 = mx_0 + t$  : Der Punkt P liegt auf der Geraden g

$y_0 > mx_0 + t$  : Der Punkt P liegt oberhalb der Geraden g

$y_0 < mx_0 + t$  : Der Punkt P liegt unterhalb der Geraden g

---

## Aufgaben

---

1. Eine Gerade geht durch die Punkte  $A(3|2)$  und  $B(4|4)$ .

Welcher der folgenden Punkte liegt ebenfalls auf der Geraden ?

- a)  $(1|1)$    b)  $(2|4)$    c)  $(5|6)$    d)  $(6|3)$    e)  $(6|5)$

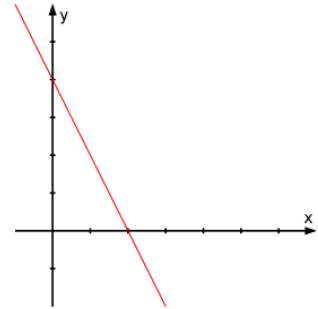
---

### BMT 2000

a) Kreuze die Funktionsgleichung an, die zu dem skizzierten Graphen gehören kann!

$y = 2x - 4$      $y = -2x + 4$

$y = 4x + 2$      $y = -4x + 2$



b) Die skizzierte Gerade wird nun am Ursprung des Koordinatensystems gespiegelt.

Welche besondere gegenseitige Lage haben Gerade und Bildgerade?

---

## Gleichungen mit zwei Unbekannten - implizite Geradengleichungen

---

- Eine Gleichung der Form

$$ax + by + c = 0 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Q},$$

wobei  $a$  und  $b$  nicht zugleich Null sind, heißt lineare Gleichung mit den zwei Lösungsvariablen  $x$  und  $y$ .

Die Lösung einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten besteht aus allen Zahlenpaaren

$(x | y)$ , die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergeben. Jedes Zahlenpaar

lässt sich als Punkt im Koordinatensystem deuten.

►  $3x + 2y - 4 = 0$

ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten. Lösungspunkte sind

$$(4 | -4), (0 | 2), (-2 | -2) \text{ usw.}$$

►  $2x - 3 = 0$  ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten.

Lösungspunkte sind  $(1,5 | 0), (1,5 | 1), (1,5 | -2)$  usw.

- Die Punkte  $(x | y)$ , deren Koordinaten eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten erfüllen, liegen auf einer Geraden.

Ist  $b \neq 0$ , dann lautet die Gleichung dieser Geraden  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Ist  $b = 0$ , dann besteht die Lösungsmenge aus den Punkten  $(-\frac{c}{a} | y)$  mit beliebigem  $y \in \mathbb{Q}$ .

Diese Punkte bilden eine Parallele zur  $y$ -Achse.

---

## Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

---

Die Lösungsmengen der linearen Ungleichungen

$$y > mx + t \text{ bzw. } y < mx + t$$

bestehen in der graphischen Veranschaulichung aus allen Punkten des Koordinatensystems, die oberhalb bzw. unterhalb der **Randgeraden** mit der Gleichung  $y = mx + t$  liegen.

Die Lösungsmengen der linearen Ungleichungen

$$x > a \text{ bzw. } x < a$$

bestehen in der graphischen Veranschaulichung aus allen Punkten des Koordinatensystems die rechts bzw. links von der **Randgeraden** mit der Gleichung  $x = a$  liegen.

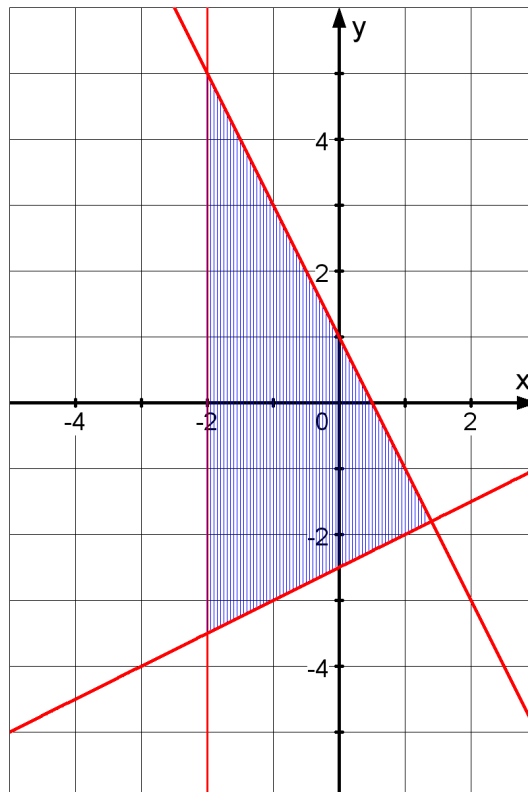
### Beispiel :

Kennzeichne im Koordinatensystem die Lösungsmenge von

$$(1) x > -2 \quad (2) y < -2x + 1 \quad (3) x - 2y - 5 > 0$$

Randgeraden :

$$(1) x = -2 \quad (2) y = -2x + 1 \quad (3) y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$



## Aufgaben :

---

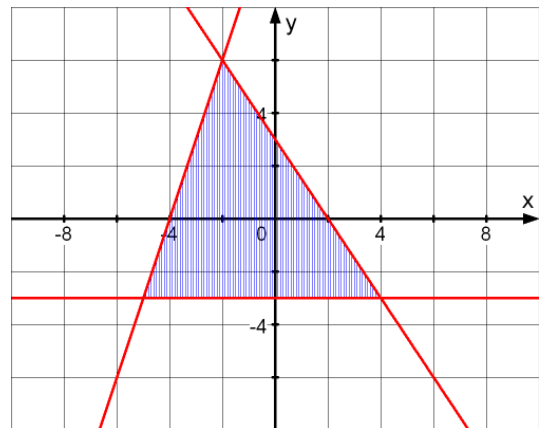
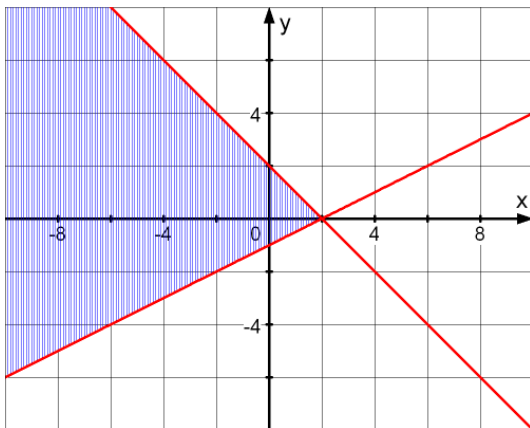
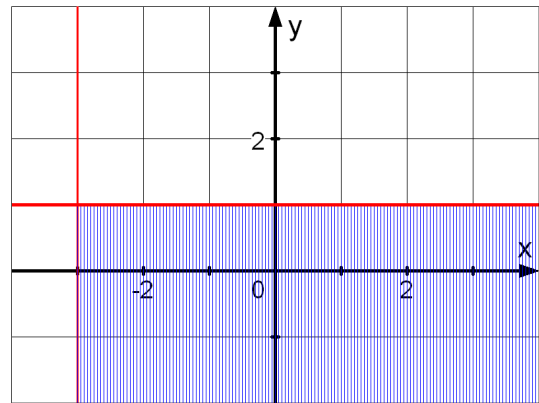
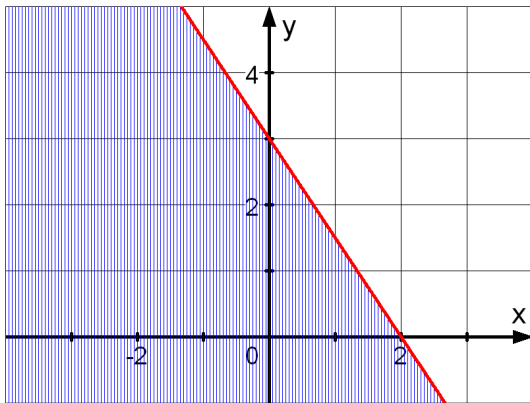
---

1. Veranschauliche in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte  $(x; y)$ , die jeweils zugleich die angegebenen Bedingungen erfüllen

a) (1)  $3x + 2y - 8 > 0$  (2)  $2y - 3 \leq 0$  (3)  $2x + 6 \geq 0$

---

2. Beschreibe die schraffierten Punktmengen durch ein oder mehrere Ungleichungen



## Die systematische Lösung eines linearen Gleichungssystems

---

Folgende Methoden können zur Lösung eines linearen Gleichungssystems bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen angewendet werden :

### A Gleichsetzungsverfahren

---

**Beispiel :**

(1)	$x + 2y = 2$	
(2)	$2x - y = -6$	
(1')	$2y = -x + 2$ $y = -\frac{1}{2}x + 1$	<b>Auflösen der Gleichung (1)</b>
(2')	$-y = -2x - 6$ $y = 2x + 6$	<b>Auflösen der Gleichung (2)</b>
(1') = (2')	$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x + 6$ $-\frac{5}{2}x = 5$ $x = -2$	<b>Gleichsetzen</b> <b>und</b> <b>Lösen der sich ergebenden Gleichung</b>
$x = 2$ in (2')	$y = 2 \cdot (-2) + 6 = 2$	<b>Einsetzen</b>
	$L = \left\{ (-2; 2) \right\}$	<b>Lösungsmenge</b>

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die für die Variable erhaltenen Terme gleich.



## B Einsetzverfahren

---

(1)	$x + 2y = 3$	
(2)	$3x + 4y = 5$	
(1')	$x = -2y + 3$	<b>Auflösen</b>
(1') in (2)	$3 \cdot (-2y + 3) + 4y = 5$ $-6y + 9 + 4y = 5$ $-2y + 9 = 5$ $y = 2$	<b>Einsetzen</b> <b>und</b> <b>Lösen der sich ergebenden Gleichung</b>
$y = 2$ in (1')	$x = -2 \cdot 2 + 3 = -1$	<b>Einsetzen</b>
	$L = \{(-1; 2)\}$	<b>Lösungsmenge</b>

Beim Einsetzverfahren löst man eine Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt dene für diese Variablen erhaltenen Term in die andere Gleichung ein.

## C Additionsverfahren

---

(1)	$2x + 3y = 1$	
(2)	$3x + 4y = 2$	
$3 \cdot (1)$	$6x + 9y = 3$	<b>Multiplikation von (1) ergibt Gleichung (3)</b>
$-2 \cdot (2)$	$-6x - 8y = -4$	<b>Multiplikation von (2) ergibt Gleichung (4)</b>
$(3) + (4)$	$y = -1$	<b>Addition der neuen Gleichungen</b>
$y = -1$ in (1)	$2x + 3 \cdot (-1) = 1$ $x = 2$	<b>Einsetzen</b>
	$L = \{(2; -1)\}$	<b>Lösungsmenge</b>

Beim Additionsverfahren multipliziert man eine oder beide Gleichungen so, dass sich bei der Addition beider Gleichungen eine Gleichung ergibt, die nur mehr eine Variable enthält.

---

## Aufgaben

---

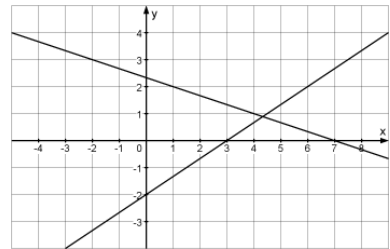
1. Gegeben ist die Funktion  $f : x \rightarrow -2x - 3$

- Begründe ohne Zeichnung, in welchen Quadranten der Graph der Funktion verläuft.
  - Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne den Graphen.
  - Zeige durch Rechnung, dass der Punkt  $P(3 \mid -9)$  auf dem Graphen, der Punkt  $Q(0 \mid -13)$  jedoch nicht auf dem Graphen liegt.
  - Wie lautet die Funktionsvorschrift derjenigen linearen Funktion, auf deren Graphen sowohl P als auch Q liegt.
- 

2. Die Punkte  $A(-1 \mid 6)$  und  $B(6 \mid 3)$  sind Elemente der Geraden g. Die Gerade h geht durch den Punkt  $C(1 \mid 2)$  und hat die Steigung  $\frac{3}{4}$ .

- Ermittle graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h !
  - Stelle die Gleichungen von g und h auf und berechne die Koordinaten von S !
- 

3. Gib die Funktionsgleichungen der Geraden g und h an und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunktes S !



4. Wie lautet die Gleichung der Parallelen zu  $y = \frac{7}{3}x - \frac{12}{5}$  durch den Punkt  $(18 \mid -23)$  ?

---

5. Untersuche rechnerisch, ob die drei Punkte  $A(-6 \mid 4)$ ,  $B(5 \mid -3)$  und  $C(-7 \mid \frac{53}{11})$  auf einer Geraden liegen.

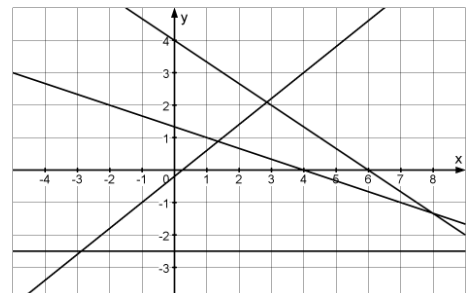
---

6. Die Punkte  $P(4 \mid 2)$ ,  $Q(1 \mid v)$ ,  $R(u \mid 13)$  und  $S(24 \mid 7)$  und  $T(3w \mid w)$  liegen auf einer Geraden.

Wie groß sind u und v ?

---

7. Bestimme die Gleichungen der eingezeichneten Geraden.



8. Gegeben: Gerade g mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{5}x + 8$

a) Zeichnen die Gerade im Koordinatensystem?

b) Wo liegt der Schnittpunkt mit der x-Achse ?

c) Wie lautet die Gleichung der zu g parallelen Geraden durch  $P(5 \mid 5)$  ?

d) Liegt der Punkt  $Q(120 \mid -15)$  auf , ober oder unterhalb der Geraden g ?

---

9. Bestimme die Lösungsmenge

(1)  $3x + 4y = -5$  (2)  $6x + 7y = 8$

---