Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Lineare Funktionen

- Eine Funktion $f: x \rightarrow y = mx + t$, $D = D_{max}$, mit zwei Zahlen m und t heißt eine **lineare Funktion**.

►

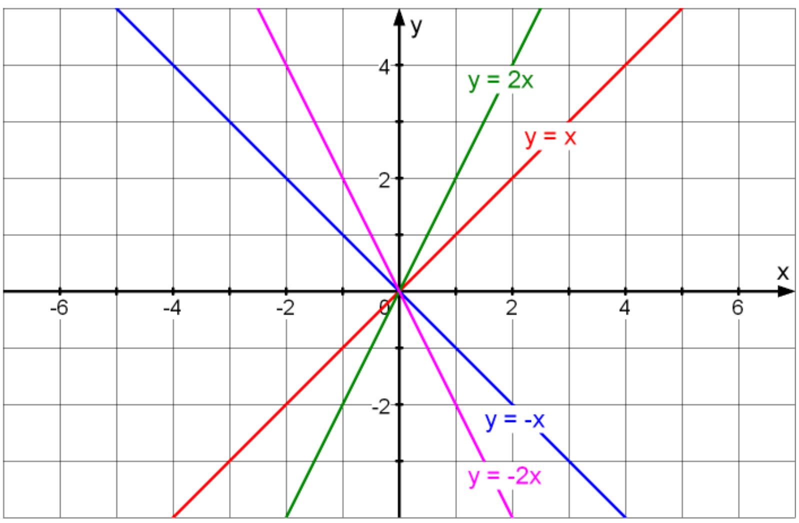
$f: x \rightarrow y = 2x + 1$	$m = 2$ und $t = 1$
$f: x \rightarrow y = x - 2$	$m = 1$ und $t = -2$
$f: x \rightarrow y = -x$	$m = -1$ und $t = 0$
$f: x \rightarrow y = 2$	$m = 0$ und $t = 2$
$f: x \rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$	$m = \frac{1}{2}$ und $t = -1$

- Speziell ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{t = 0}} : y = mx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m$$

x- und y-Werte sind direkt proportional zueinander mit dem Prortionalitätsfaktor $m = \frac{y}{x}$.

Der Graph der Funktion ist dann eine Gerade durch den Ursprung $O\left(0 \mid 0\right)$ des Koordinatensystems.



a) $\mathbf{m > 0}$: Die Gerade steigt

b) $\mathbf{m = 0}$: Die Gerade ist identisch mit der x-Achse

c) $\mathbf{m < 0}$: Die Gerade fällt.

m heißt auch **Steigungsfaktor** der Geraden.

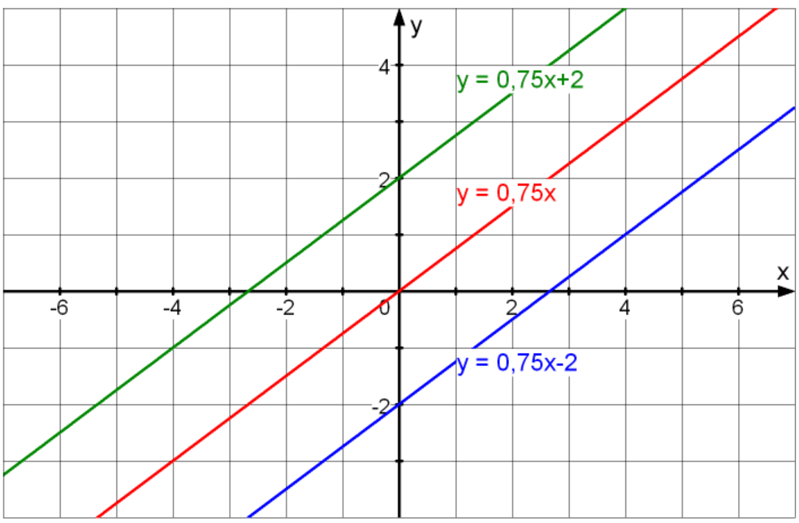
$\boxed{\mathbf{t \neq 0}}$

Der Graph der Funktion $f : x \rightarrow y = mx + t$

ist dann eine zum Graphen der Funktion $f : x \rightarrow y = mx$

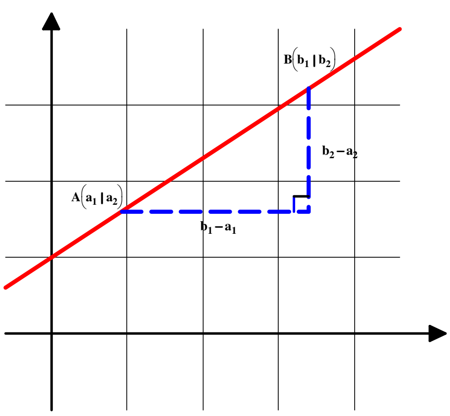
parallele Gerade durch den Punkt $S_y(0 \mid t)$

►



- heißt **y-Abschnitt** der Geraden.

- Den Steigungsfaktor m einer Geraden kann man mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dem Schaubild der Geraden entnehmen



Sind $A\left(a_1 \mid a_2\right)$ und $B\left(b_1 \mid b_2\right)$ die auf der Gerade liegenden Eckpunkte des Steigungsdreiecks, dann ist

$$\boxed{\mathbf{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}}}$$

$\Delta y = b_2 - a_2$ ist gleich der Zu- oder Abnahme der y-Werte bei einer Zunahme oder Abnahme der x-Werte um $\Delta x = b_1 - a_1$.

► Für die Gleichung der Geraden durch die Punkte $A\left(1 \mid -2\right)$ und $B\left(4 \mid 2\right)$ ergibt sich

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{2-(-2)}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

Also hat Gleichung der Geraden die Form $y = \frac{4}{3}x + t$.

Da der Punkt A auf der Geraden liegt, muss sich beim Einsetzen der x-Koordinate des Punktes seine y-Koodinate ergeben. Also

$$-2 = \frac{4}{3} \cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{10}{3}$$

und damit ergibt sich für die Gerade AB die Gleichung $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

- Die Funktionsgleichung $y = mx + t$ einer linearen Funktion nennt man auch explizite Geradengleichung.

- Für einen Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$ und eine Gerade g mit der Gleichung $y = mx + t$ lassen sich folgende drei Fälle unter-scheiden

$\boxed{y_0 = mx_0 + t}$: Der Punkt P liegt auf der Geraden g

$\boxed{y_0 > mx_0 + t}$: Der Punkt P liegt oberhalb der Geraden g

$\boxed{y_0 < mx_0 + t}$: Der Punkt P liegt unterhalb der Geraden g

Aufgaben

---

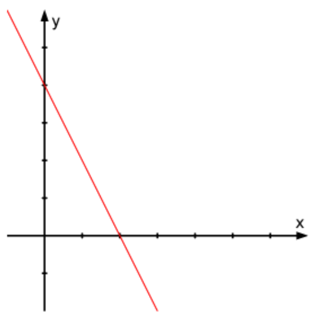
1. Eine Gerade geht durch die Punkte $A\left(3 \mid 2\right)$ und $B\left(4 \mid 4\right)$.

   Welcher der folgenden Punkte liegt ebenfalls auf der Geraden ?

   a) $\left(1 \mid 1\right)$ b) $\left(2 \mid 4\right)$ c) $\left(5 \mid 6\right)$ d) $\left(6 \mid 3\right)$ e) $\left(6 \mid 5\right)$

BMT 2000

a) Kreuze die Funktionsgleichung an, die zu dem skizzierten Graphen gehören kann!



☐ $y = 2x - 4$ ☐ $y = -2x + 4$

☐ $y = 4x + 2$ ☐ $y = -4x + 2$

b) Die skizzierte Gerade wird nun am Ursprung des Koordinatensystems gespiegelt.

Welche besondere gegenseitige Lage haben Gerade und Bildgerade?

Gleichungen mit zwei Unbekannten - implizite Geradengleichungen

---

- Eine Gleichung der Form

$$ax + by + c = \text{ mit } a,b,\, c \in \mathbb{Q},$$

wobei a und b nicht zugleich Null sind, heißt lineare Gleichung mit den zwei Lösungsvariablen x und y.

Die Lösung einer linearen Gleichugn mit zwei Unbekannten besteht aus allen Zahlenpaaren $\left(x \mid y\right)$, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergeben. Jedes Zahlenpaar lässt sich als Punkt im Koordinatensystem deuten.

► $3x + 2y - 4 = 0$

ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten. Lösungspunkte sind

$\left(4 \mid -4\right), \left(0 \mid 2\right), \left(-2 \mid -2\right)$ usw.

► $2x - 3 = 0$ ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten.

Lösungspunkte sind $\left(1{,}5 \mid 0\right), \left(1{,}5 \mid 1\right), \left(1{,}5 \mid -2\right)$ usw.

- Die Punkte $\left(x \mid y\right)$, dren Koordinaten eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten erfüllen, liegen auf einer Geraden.

Ist $b \neq 0$, dann lautet die Gleichung dieser Geraden $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Ist $b = 0$, dann besteht die Lösungsmenge aus den Punkten $\left(-\frac{c}{a} \mid y\right)$ mit beliebigem $y \in \mathbb{Q}$.

Diese Punkte bilden eine Parallele zur y-Achse.

Lineare Unleichungen mit zwei Unbekannten

Die Lösungsmengen der linearen Ungleichungen

$y > mx + t$ bzw. $y < mx + t$

bestehen in der graphischen Veranschaulichung aus allen Punkten des Koordinatensystems, die oberhalb bzw. unterhalb der **Randgeraden** mit der Gleichund $y = mx + t$ liegen.

Die Lösungsmengen der linearen Ungleichungen

$x > a$ bzw. $x < a$

bestehen in der graphischen Veranschaulichung aus allen Punkten des Koordinatensystems die rechts bzw. links von der **Randgeraden** mit der Gleichung $x = a$ liegen.

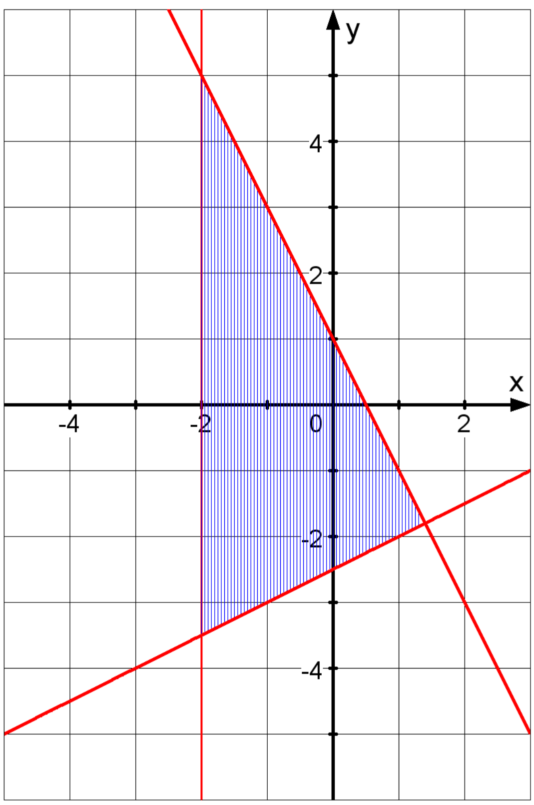
Beispiel :

Kennzeichne im Koordinatensystem die Lösungsmenge von

(1) $x > -2$ (2) $y < -2x + 1$ (3) $x - 2y - 5 > 0$

Randgeraden :

(1) $x = -2$ (2) $y = -2x + 1$ (3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



Aufgaben :

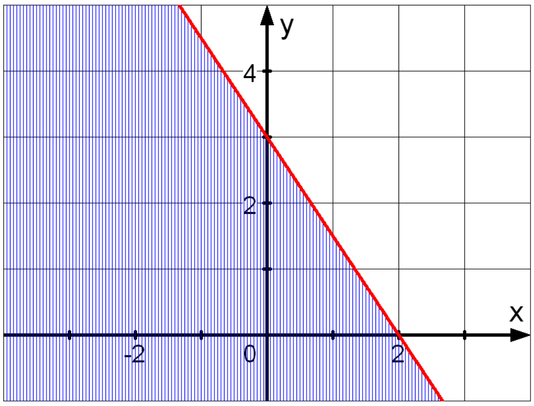
===

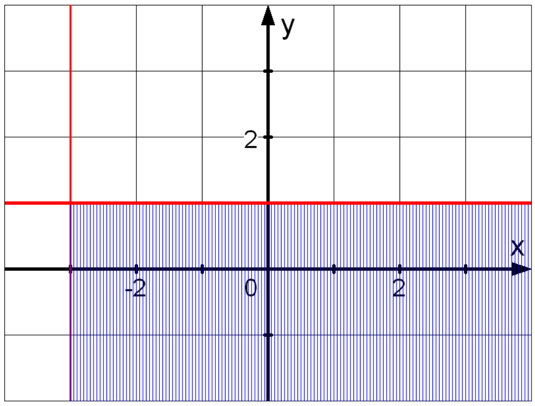
1. Veranschauliche in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte (x; y), die jeweils zugleich die angegebenen Bedingungen erfüllen

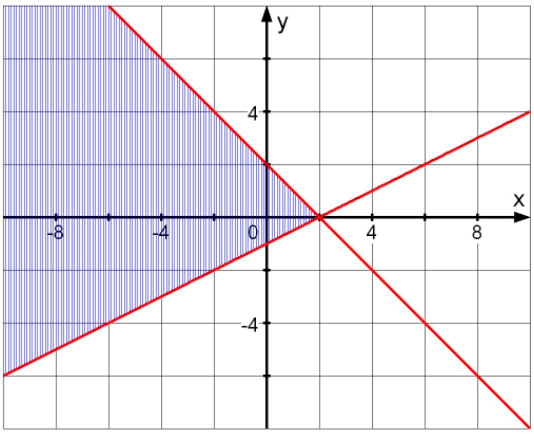
   a) (1) $3x + 2y - 8 > 0$ (2) $2y - 3 \le 0$ (3) $2x + 6 \ge 0$

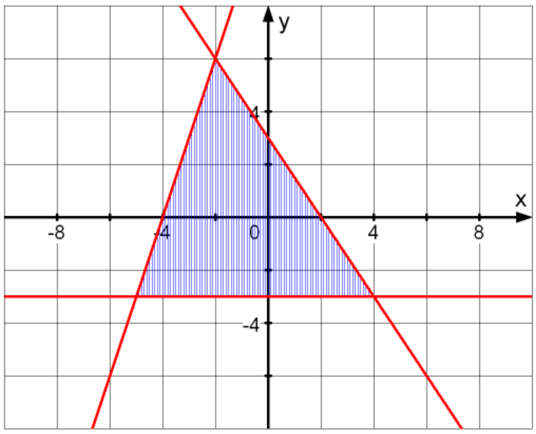
----

2. Beschreibe die schraffierten Punktmengen durch ein oder mehrere Ungleichungen









Die systematische Lösung eines linearen Gleichungssystems

Folgene Methoden können zur Lösung eines linearen Gleichungssystems bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen angewendet werden :

A Gleichsetzungverfahren

Beispiel :

(1) (2)	$x + 2y = 2$ $2x - y = -6$	
(1')	$2y = -x + 2$ $y = -\frac{1}{2}x + 1$	**Auflösen der Gleichung (1)**
(2')	$-y = -2x - 6$ $y = 2x + 6$	**Auflösen der Gleichung (2)**
(1') = (2')	$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x + 6$ $-\frac{5}{2}x = 5$ $x = -2$	**Gleichsetzen** **und** **Lösen der sich ergebenden Gleichung**
$x = 2$ in (2')	$y = 2\cdot(-2) + 6 = 2$	**Einsetzen**
	$L = \left\{(-2;\ 2)\right\}$	**Lösungsmenge**

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die für die Variable erhaltenen Terme gleich.

B Einsetzverfahren

----

(1) (2)	$x + 2y = 3$ $3x + 4y = 5$	
(1')	$x = -2y + 3$	**Auflösen**
(1') in (2)	$3 \cdot (-2y + 3) + 4y = 5$ $-6y + 9 + 4y = 5$ $-2y + 9 = 5$ $y = 2$	**Einsetzen** **und** **Lösen der sich ergebenden Gleichung**
$y = 2$ in (1')	$x = -2 \cdot 2 + 3 = -1$	**Einsetzen**
	$L = \{(-1; 2)\}$	**Lösungsmenge**

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine Gleichungen nach einerVariablen auf und setzt dene für diese Variablen erhaltenen Term in die andere Gleichung ein.

C Additionsverfahren

---

(1) (2)	$2x + 3y = 1$ $3x + 4y = 2$	
$3 \cdot (1)$	$6x + 9y = 3$	**Multiplikation von (1) ergibt Gleichung (3)**
$-2 \cdot (2)$	$-6x - 8y = -4$	**Multiplikation von (2) ergibt Gleichung (4)**
$(3) + (4))$	$y = -1$	**Addition der neuen Gleichungen**
$y = -1$ in (1)	$2x + 3 \cdot (-1) = 1$ $x = 2$	**Einsetzen**
	$L = \left\{(2;\ -1)\right\}$	**Lösungsmenge**

Beim Additionsverfahren multipliziert man eine oder beide Gleichungen so, dass sich bei der Addition beider Gleichungen eine Gleichung ergibt, die nur mehr eine Variable enthält.

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow -2x - 3$

   a) Begründe ohne Zeichnung, in welchen Quadranten der Graph der Funktion verläuft.

   b) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne den Graphen.

   c) Zeige durch Rechnung, dass der Punkt $P(3 \mid -9)$ auf dem Graphen, der Punkt $Q(0 \mid -13)$ jedoch nicht auf dem Graphen liegt.

   d) Wie lautet die Funktionsvorschrift derjenigen linearen Funktion, auf deren Graphen sowohl P als auch Q liegt.

---

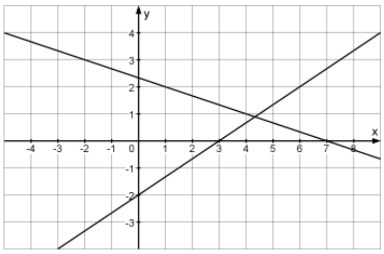
2. Die Punkte $(-1 \mid 6)$ und $B(6 \mid 3)$ sind Elemente der Geraden g. Die Gerade h geht durch den Punkt $C(1 \mid 2)$ und hat die Steigung $\frac{3}{4}$.

   a) Ermittle graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h !

   b) Stelle die Gleichungen von g und h auf und berechne die Koordinaten von S !

---

3. Gib die Funktionsgleichungen der Geraden g und h an und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunktes S !



---

4. Wie lautet die Gleichung der Parallelen zu $y = \frac{7}{3}x - \frac{12}{5}$ durch den Punkt $(18 \mid -23)$?

---

5. Untersuche rechnerisch, ob die drei Punkte $A(-6 \mid 4)$, $B(5 \mid -3)$ und $C(-7 \mid \frac{53}{11})$ auf einer Geraden liegen.

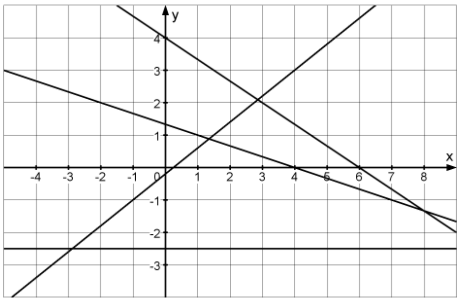
---

6. Die Punkte $P(4 \mid 2)$, $Q(1 \mid v)$, $R(u \mid 13)$ und $S(24 \mid 7)$ und $T(3w / w)$ liegen auf einer Geraden.

   Wie groß sind u und v ?

---

7. Bestimme die Gleichungen der eingezeichneten Geraden.



---

8. Gegeben: Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{5}x + 8$

a) Zeichnen die Gerade im Koordinatensystem?

b) Wo liegt der Schnittpunkt mit der x-Achse ?

c) Wie lautet die Gleichung der zu g parallelen Geraden durch $P(5 \mid 5)$?

d) Liegt der Punkt $Q(120 \mid -15)$ auf , ober oder unterhalb der Geraden g ?

---

9. Bestimme die Lösungsmenge

(1) $3x + 4y = -5$ (2) $6x + 7y = 8$
