Bruchterme und gebrochen rationale Funktionen

==

Der Quotient zweier Terme

• Es ist ist $3:4 = \frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$.

Dehnt man die Bruchschreibweise auf Terme aus, dann erhält man sog. **Bruchteme**.

► $(x+2):(3x+4) = \frac{x+2}{3x+4}$

► $a^2:(a+b) = \frac{a^2}{a+b}$

Der Quotient zweier Terme ergibt einen Bruchterm.

Einsetzen in Bruchterme

• Setzt man für die Variablen eines Bruchterms Zahlen ein, dann erhält erhält der Bruchterm einen Wert. Die Menge der Einsetzzahlen nennt man **Grundmenge G**.

► Ist $T(x;\, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ $G = \left\{(x;\, y) \,\middle|\, x,\, y \in \mathbb{Q}\right\}$, dann ist

$$T(3;\, 1) = \frac{3^2+1^2}{3-1} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$T(-3;\, 0) = \frac{(-3)^2+0^2}{-3-0} = \frac{9+0}{-3} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$T(\tfrac{1}{2};\, -\tfrac{1}{4}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{16}:\frac{3}{4} = \frac{5}{16}\cdot\frac{4}{3} = \frac{5}{12}$$

$$T(2;\, 2) = \frac{2^2+2^2}{2-2} = \frac{4+4}{2-2} = \frac{8}{0} \text{ ist nicht definiert.}$$

Beim Einsetzen in einen Bruchterm darf der Nenner nicht den Wert Null annehmen.

Die erlaubte Einsetzmenge heißt **Definitionsmenge D** des Bruchterms.

Die Definitionsmenge ist stets eine Teilmenge der angegebenen Grundmenge G.

► Für den Term $T(x; y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ ist $D = \left\{(x; y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq y\right\}$

► $T(x) = \frac{1}{2x - 1}$, $G = \mathbb{Q}$

Rechnung : $2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

Definitionsmenge : $D = \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{Q} \backslash \{\frac{1}{2}\}$

► $T(x) = \frac{2}{2x^2 - 3x}$

Rechnung : $2x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2x - 3) = 0$

Dieses Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn einer seiner Faktoren den Wert Null hat. Also

$x = 0 \vee 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$

Definitionsmenge : $D = \mathbb{Q} \backslash \{0; \frac{3}{2}\}$

► $T(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$, $G = \mathbb{Q}$

Rechnung : $x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3) \cdot (x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Definitionsmenge : $D = \mathbb{Q} \backslash \{3\}$

Aufgaben :

---

1. Gegeben ist der Term $T(a;\, b) \;=\; \dfrac{a-b}{2a+b^2}$.

Berechne den Wert des Terms für

a	3	-3	3	-3
b	4	4	-4	-4

a	$0{,}4$	$-0{,}4$	$0{,}4$	$-0{,}4$
b	$0{,}3$	$0{,}3$	$- -0{,}3$	$-0{,}3$

a	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
b	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$

---

2. Bestimme die Definitionsmenge in $G \;=\; \mathbb{Q}$

a) $T(x) \;=\; \dfrac{x+1}{2x+3}$

b) $T(x) \;=\; \dfrac{x+2}{3x^2-4x}$

c) $T(x) \;=\; \dfrac{x-1}{x^2-4}$

d) $T(x) \;=\; \dfrac{x}{9x^2-4}$

e) $T(x) \;=\; \dfrac{1}{4x^3-x}$

f) $T(x) \;=\; \dfrac{x-2}{x^2+6x+9}$

g) $T(x) \;=\; \dfrac{x+5}{4x^2-20x+25}$

h) $T(x) \;=\; \dfrac{x^2+1}{4x^3+4x^2+x}$

i) $T(x) \;=\; \dfrac{x^2}{x^2+1}$

j) $T(x) \;=\; \dfrac{x}{x^3-2x^2-x-2}$

Das Erweitern von Bruchtermen

- Es ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$.

  Für Bruchterme gilt entsprechend

$$\boxed{\mathbf{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}}}$$

▶ $\frac{2a}{3b} = \frac{2a \cdot 2a}{3b \cdot 2a} = \frac{4a^2}{6b^2}$

▶ $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (a+b)}{b \cdot (a+b)} = \frac{a^2+ab}{ab+b^2}$

▶ $\frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot y}{(x+1) \cdot y} = \frac{xy}{xy+y}$

▶ $\frac{x-y}{x-2y} = \frac{(x-y) \cdot (x+2y)}{(x-2y) \cdot (x+2y)} = \frac{x^2+2xy-xy-2y^2}{x^2-4y^2} = \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-4y^2}$

▶ $\frac{x}{x-1} = \frac{x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

▶ $\frac{x-y}{-x} = \frac{(x-y) \cdot (-1)}{(-x) \cdot (-1)} = \frac{-x+y}{x} = \frac{y-x}{x}$

> Ein Bruchterm wird erweitert, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multipliziert.

Aufgaben

---

1. Erweitere

a) $\frac{2a}{3b^2}$ mit $4a^2b$ b) $\frac{a-2b}{a+3b}$ mit $-2a$ c) $\frac{2a+b}{a-2b}$ mit $a+2b$

----

2. Erweitere mit -1

a) $\frac{x}{-y}$ b) $\frac{x-y}{-x+2y}$ c) $\frac{-x-y}{x-2y}$ d) $\frac{x-y}{-x-2y}$

Das Kürzen von Bruchtermen

Es ist $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$.

Für Bruchterme gilt entsprechend

$$\boxed{\frac{\mathbf{a \cdot c}}{\mathbf{b \cdot c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$$

Beachte :

Zähler $a \cdot c$ und Nenner $b \cdot c$ sind Produkte mit dem gleichen Faktor c.

Beispiele :

a) $\frac{4a^2}{6a} = \frac{2a \cdot 2a}{3 \cdot 2a} = \frac{2a}{3}$ b) $\frac{3ab}{6ab^2} = \frac{1 \cdot 3ab}{2b \cdot 3ab} = \frac{1}{2b}$ c) $\frac{a \cdot (x+y)}{b \cdot (x+y)} = \frac{a}{b}$

In den nächsten Beispielen ist der Zähler oder der Nenner kein Produkt. Man muss zunächst faktorisieren.

d) $\frac{a^2 - 2ab}{2ab} = \frac{a \cdot (a-2b)}{2ab} = \frac{a-2b}{2b}$

e) $\frac{3a^2 - 6ab}{a^2 - 4b^2} = \frac{3a \cdot (a-2b)}{(a+2b) \cdot (a-2b)} = \frac{3a}{a+2b}$

f) $\frac{y-x}{x^2 - y^2} = \frac{y-x}{(x+y)(x-y)} = \frac{-(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{-1}{x+y} = -\frac{1}{x+y}$

g) $\frac{xy - x^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x \cdot (y-x)}{(x-y)^2} = \frac{-x \cdot (x-y)}{(x-y)^2} = \frac{-x}{x-y} = \frac{x}{y-x}$

oder

$\frac{xy - x^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x \cdot (x-y)}{(x-y)^2} = \frac{x \cdot (x-y)}{(y-x)^2} = \frac{x}{y-x}$ **Beachte :** $(x-y)^2 = (y-x)^2$!

> Ein Bruchterm wird gekürzt, wenn man den Zähler und Nenner durch den gleichen Term dividiert.
>
> Durch welchen Term Zähler und Nenner teilbar sind,erkennt man erst, wenn man diese faktorisiert. .

Aufgaben :

---

1. Kürze vollstädig

a) $\frac{12a^2b}{18ab^2}$ b) $\frac{ax+a}{x^2+x}$ c) $\frac{4x^2-6xy}{6x-9y}$ d) $\frac{5x+20}{5}$

e) $\frac{x}{x^2+x}$ f) $\frac{6x}{2x^2-4x}$ g) $\frac{a^2-b^2}{6a+6b}$ h) $\frac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-3ab}$

i) $\frac{x^2-4x+4}{4-x^2}$

---

2. Vereinfache beide Terme, falls es möglich ist

a) $\frac{9x}{3x-6x^2}$ b) $\frac{4}{4+x^2}$

Begründe, dass die Termwerte von Teilaufgabe b) nicht größer als 1 werden können, unabhängig davon welche Zahl man für x einsetzt.

BMT 2002

Kürze so weit wie möglich (es wird die maximal mögliche Definitionsmenge vorausgesetzt) :

$$\frac{x-x^2}{x-x^3}$$

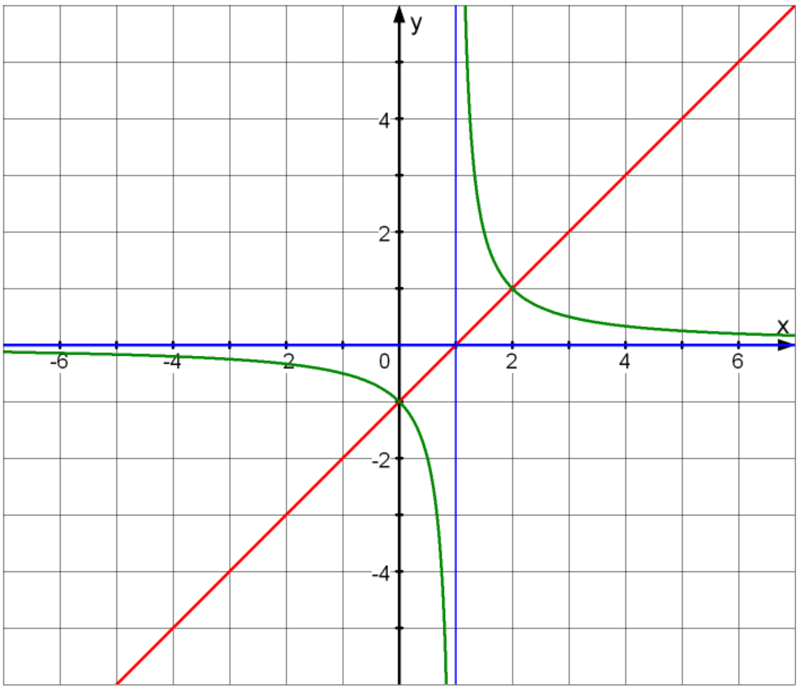
Gebrochen-rationale Funktionen

► Wir zeichnen die Graphen der Funktionen

$f : x \rightarrow y = x - 1$ und $g : x \rightarrow y = \dfrac{1}{x-1}$

Wertetabelle :

x	-4	0	0,5	0,8	1	1,2	1,5	2	6
f(x)	-5	-1	-2	0,2	0	0,2	0,5	1	5
g(x)	$-0{,}2$	-1	-2	-10	---	10	2	1	0,2



Ergebnis :

a) Die Funktion g ist an der Stelle $x = 1$, der Nullstelle von f, nicht definiert.

Man nennt $x = 1$ daher eine Defintionslücke von g.

b) Die Funktionswerte von g werden an x-Werten, die nahe bei der Defintionslücke liegen, beliebig groß $\left(\infty\right)$ bzw. beliebig klein $\left(-\infty\right)$.

Der Graph von g nähert sich der senkrechten Geraden $x = 1$ an.

Man eine diese Gerade deshalb eine senkrechte Asymptote (griech. asymptotos "nicht zusammenfallend") des Graphen von g.

b) Der Graph der Funktion nähert sich für große bzw. kleine x-Werte der Geraden $y = 0$, der x-Achse, an.

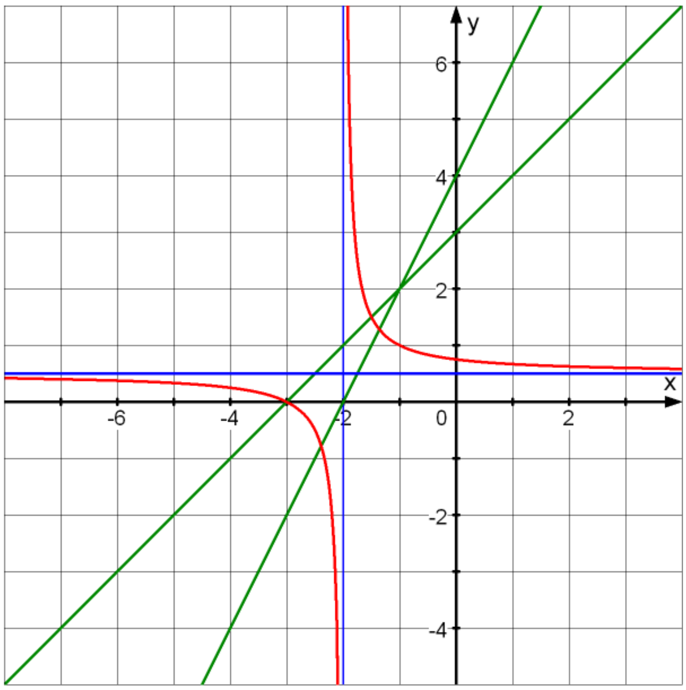
Man nennt die x-Achse deshalb eine waagrechte Asymptote des Graphen von f.

► Wir zeichnen die Graphen der Funktionen

$f: x \to y = 2x - 3$, $g: x \to y = x + 2$ und $h: x \to y = \dfrac{x+3}{2x+4}$

Wertetabelle :

x	-7	-4	-3	$-2{,}2$	-2	$-1{,}9$	-1	0	3
f(x)	-4	-1	0	0,8	1	1,1	2	3	6
g(x)	-10	-4	-2	$-0{,}4$	0	0,4	2	4	10
h(x)	0,45	0,25	0	-2	---	3,75	1	0,75	0,6



Ergebnis :

a) Die Funktion h ist an der Stelle $x = -2$ nicht definiert.

Ihre maximale Definitionsmenge ist $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

b) Die Gerade $x = -2$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von h.

b) Die Funktionswerte nähern sich für große bzw. kleine x-Werte dem Wert $\frac{1}{2}$.

Die Gerade $y = \frac{1}{2}$ ist waagrechte Asymptote des Graphen von f.

Eine Funktion

$f: x \to y = f(x)$ mit maximaler Defintionsmenge D_{max}

mit einem echten Bruchterm f(x) als Funktionsterm, heißt **gebrochen rationale Funktion**.

Werden die Funktionswerte in der Nähe einer Definitionslücke x_0 beliebig groß $\left(\infty\right)$ bzw. beliebig klein $\left(-\infty\right)$,

dann ist die Gerade $x = x_0$ eine **senkrechte Asymptote** des Graphen von f.

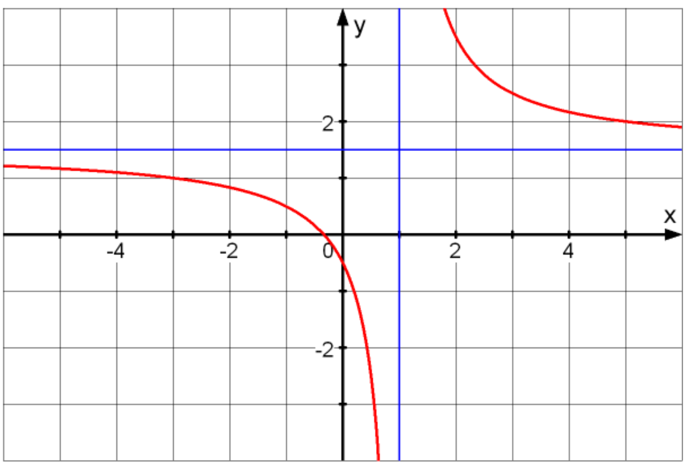
Nähern sich die Funktionswerte für große bzw. kleine x-Werte einem Wert y_0,

dann ist die Gerade $y = y_0$ eine **waagrechte Asymptote** des Graphen von f.

► Die Funktion

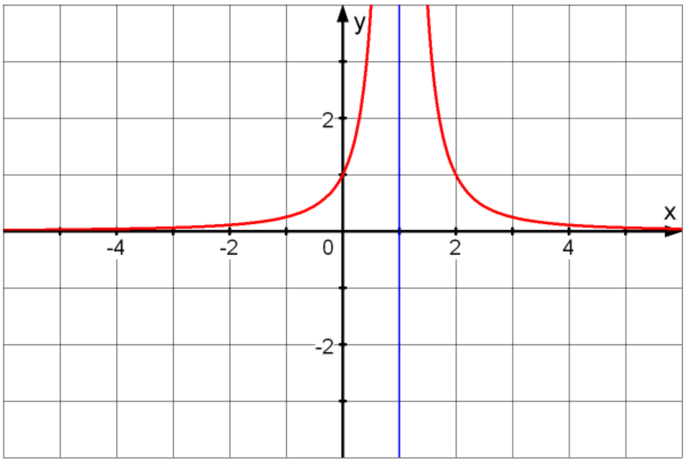
$$f: x \to \frac{3x+1}{2x-2}$$

besitzt die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{Q}\backslash\{-2\}$, die senkrechte Asymptote $x = 1$ und die waagrechte Asymptote $y = \frac{3}{2}$.



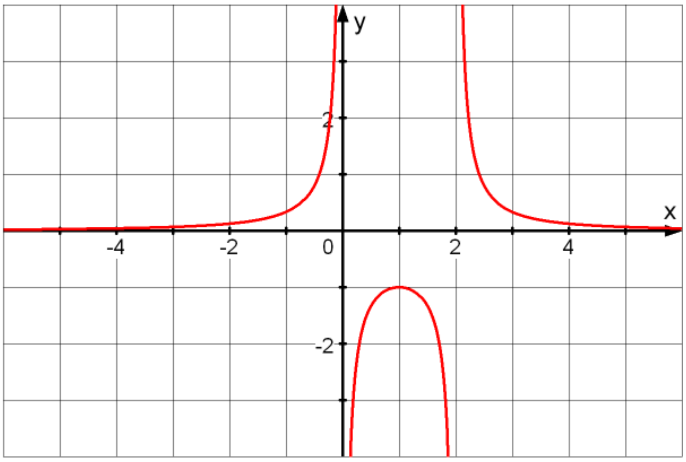
► Die Funktion $f: x \to \frac{1}{(x-1)^2}$

besitzt die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, die senkrechte Asymptote $x = 1$ und die waagrechte Asymptote $y = 0$.



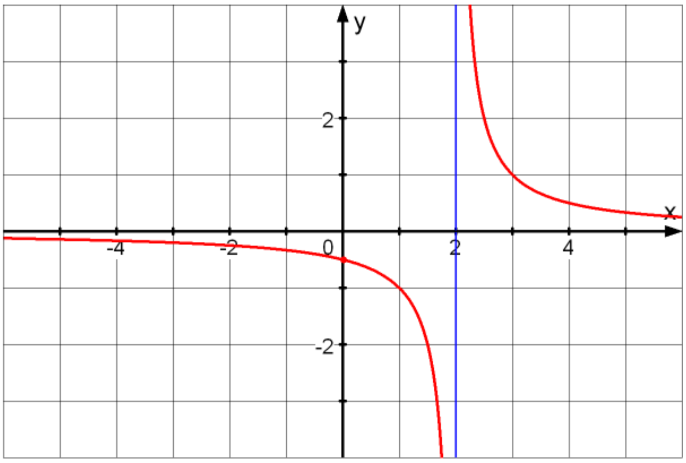
► Die Funktion $f: x \to \frac{1}{x^2 - 2x}$

besitzt die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{0, 2\}$, die senkrechten Asymptoten $x = 0$ und $x = 2$ und die waagrechte Asymptote $y = 0$.



► Die Funktion $f: x \to \dfrac{x}{x^2 - 2x}$

besitzt die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{Q}\backslash\{0; 2\}$, brsitzt aber nur die Gerade $x = 2$ als senkrechte Asymptote.



Grund :

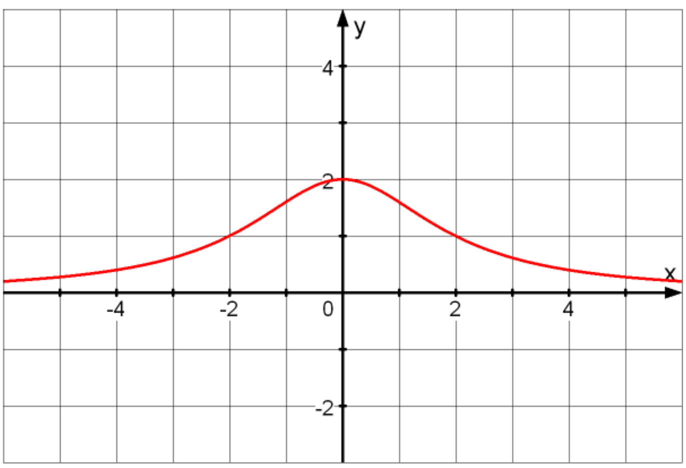
Es ist $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \dfrac{x}{x \cdot (x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

d. h. der Graph von f stimmt auf $D_{max} = \mathbb{Q}\backslash\{0; 2\}$ mit dem Graphen der Funktion

$g: x \to \dfrac{1}{x-2}$ überein.

► Die Funktion $f: x \to \dfrac{2}{0{,}25x^2 + 1}$

besitzt die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{Q}$ und die waagrechte Asymptote $y = 0$.



Aufgaben

1. Gegeben ist der Term $T(a) = \dfrac{3}{1-a}$.

   a) Berechne $T(4)$, $T(-5)T(4)$ und $T(\frac{1}{2})$.

   b) Welchen Wert der Variablen a darfst du nicht in diesen Term einsetzen ?

   c) Erläutere, wo diejenigen Zahlen auf dem Zahlenstrahl liegen, die beim Einsetzen möglichst große Termwerte ergeben.

---

2. Gegeben ist die Funktion f mit Abbildungsvorschrift $f: x \to \dfrac{2x}{2x-3}$

   a) Welche Zahl kann nicht in der Definitionsmenge enthalten sein ?

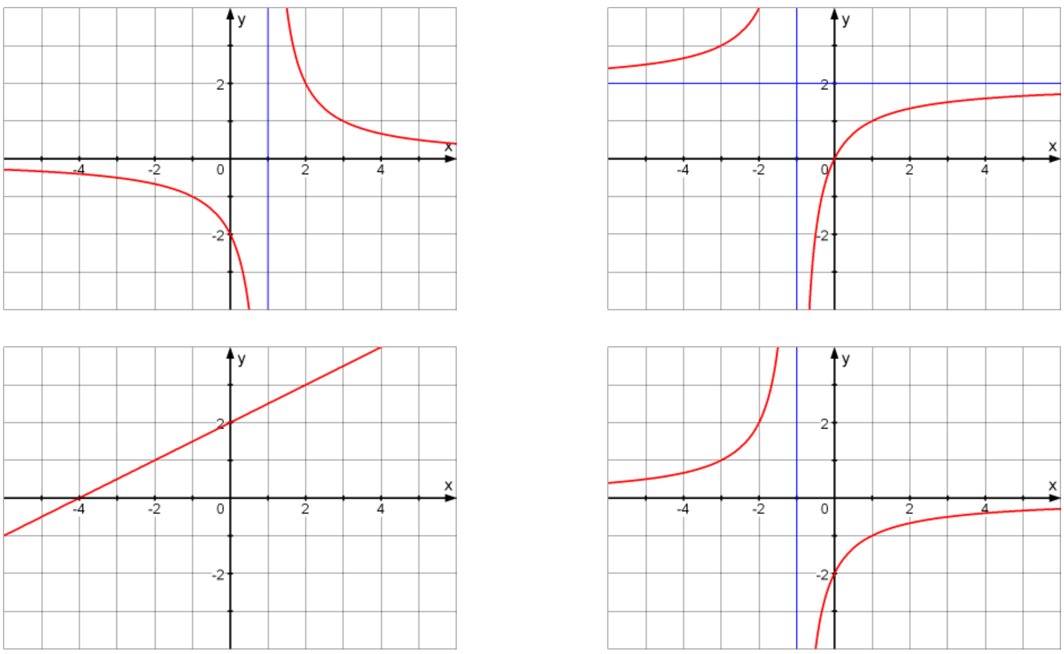
   b) Berechne $f(10)$, $f(100)$ und $f(1000)$.

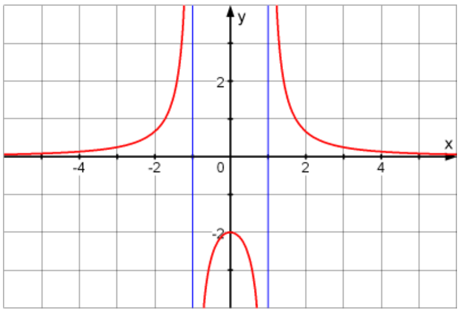
   c) Lege eine Wertetabelle an und zeichne den Funktionsgraphen.

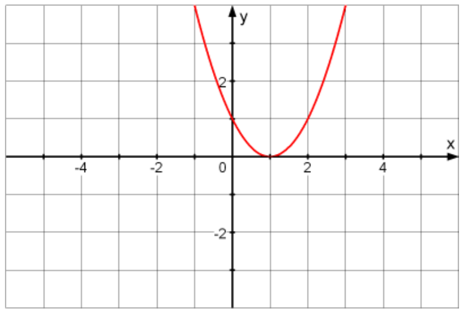
   d) Gib die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

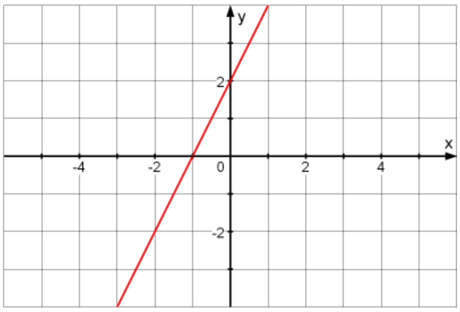
---

3. Welche der abgebildeten Graphen gehören zu den angegebenen Funktionsgleichungen ? Ordne zu.





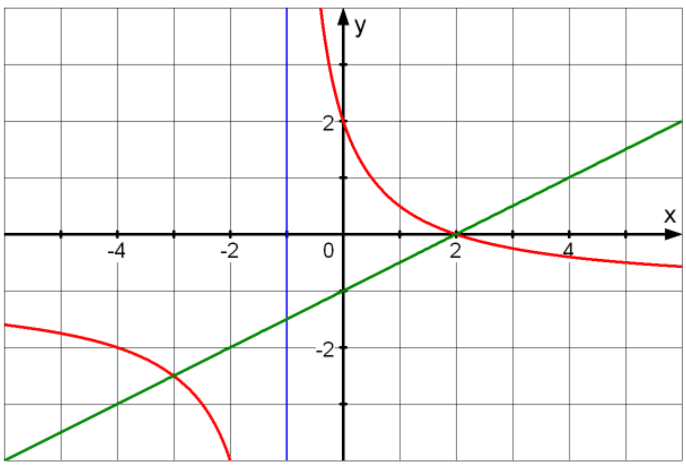




a) $y = \frac{2x}{x+1}$　　b) $y = \frac{2}{(x-1)^2}$　　c) $y = \frac{2}{x-1}$

d) $y = 2x+2$　　e) $y = (x-1)^2$　　f) $y = \frac{-2}{x+1}$

4.



a) Die Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen

$y = \frac{x-2}{1+x}$ und $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Bestimme anhand der Zeichnung die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x-2}{1+x} = \frac{1}{2}x - 1x$

b) Bestimme mit Hilfe des gegebenen Funktionsgraphen die Lösungsmenge der Gleichung

$\frac{x-2}{1+x} = -2$ bzw. $\frac{x-2}{1+x} = -1$

---

4. Gib die Gleichungen zweier Funktionen f und g an, deren Graphen die senkrechte Asymptote $x = -1{,}5$ und die waagrechte Asymptote $y = 2$ haben.

Rechnen mit Bruchtermen

==

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

• Es ist $\frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7+2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Also ist

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{c}}} \text{ und } \boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\mathbf{c}}}$$

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler der Bruchterme addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

► $\frac{4a}{3b} + \frac{5a}{3b} = \frac{4a+5a}{3b} = \frac{9a}{3b} = \frac{3a}{b}$

► $\frac{2a+1}{a^2+a} + \frac{a-1}{a^2+a} = \frac{(2a+1)+(a-1)}{a^2+a} = \frac{3a}{a^2+a} = \frac{3a}{a\cdot(a+1)} = \frac{3}{a+1}$

► $\frac{2x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-(x-1)}{x+1} = \frac{2x-x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$

Beachte :

1. Sind die Zählerterme Summen, dann müssen diese beim Übergang zu einem Bruchstrich eingeklammert werden.

2. Nach dem Zusammenfassen, falls möglich, kürzen.

• Es ist $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2\cdot7}{5\cdot7} + \frac{3\cdot5}{7\cdot5} = \frac{2\cdot7+3\cdot5}{5\cdot7} = \frac{14+15}{35} = \frac{29}{35}$

Also ist

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{ad}}{\mathbf{bd}} + \frac{\mathbf{bc}}{\mathbf{bd}} = \frac{\mathbf{ad}+\mathbf{bc}}{\mathbf{bd}}}$$

Ungleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man

a) die Bruchterme auf einen gemeinsamen Nenner (**Hauptnenner**) erweitert.
b) die Zähler der so erhaltenen gleichnamigen Bruchterme addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Den Hauptnenner findet man analog zur Primfaktorzerlegung durch Faktorisieren der Nenner.

► $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} - \frac{2x}{6} = \frac{x}{6}$

► $\frac{1}{4a} - \frac{a+1}{6a^2} = \frac{1 \cdot 3a - (a+1) \cdot 2}{12a^2} = \frac{3a - 2a - 2}{12a^2} = \frac{a-2}{12a^2}$

► $\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{1} = \frac{1 + 1 \cdot x}{x} = \frac{1+x}{x}$

► $\frac{x-4}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-4)(x+1) - (x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2 - 2x - 4) - (x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 1} = \frac{x-6}{x^2-1}$

► $\frac{a+b}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a^2 + ab} = \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} - \frac{b}{a(a+b)} = \frac{(a+b) \cdot a - b \cdot (a-b)}{a \cdot (a+b)(a-b)} = \frac{a^2 + b^2}{a \cdot (a+b)(a-b)}$

Multiplikation und Division von Bruchtermen

- Es ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$ und $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

  Also ist

$$\boxed{\mathbf{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}} \text{ und } \boxed{\mathbf{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}}$$

> Zwei Bruchterme werden miteinander mulzipliziert, indem man Zählerterm mit Zählerterm und Nennerterm mit Nennerterm multipliziert.
>
> Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit dessen Kehrbruch multiplziert.

► $\frac{2a^2}{3} \cdot \frac{4a}{5b} = \frac{8a^3}{15b}$

► $\frac{x-2y}{x-y} \cdot \frac{2x+y}{x+y} = \frac{(x-2y)\cdot(x+y)}{(x-y)\cdot(x+y)} = \frac{x^2+xy-2xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}$

► $\frac{xy-2y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-4y^2} = \frac{y\cdot(x-2y)\cdot x^2}{x\cdot(x+2y)\cdot(x-2y)} = \frac{xy}{x+2y}$

> **Beachte** :
>
> 1. Summenterme vor dem Ausmultiplizieren einklammern.
>
> 2. Vor dem Ausmultiplizieren kürzen.

Aufgaben

---

1. Fasse so weit wie möglich zusammen

a) $\frac{2}{3b}+\frac{1}{3b}$ b) $\frac{x^2+x}{1-x}-\frac{x+1}{1-x}$ c) $\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{x+2}{x^2-2x}$

---

2. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ b) $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}$ c) $\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}$

d) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-4}$ e) $\frac{1}{x}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{x}{x-1}$

---

3. a) $1-\frac{1}{x+1}$ b) $a+b-\frac{2ab+2b^2}{a-b}$ c) $\frac{4x}{2x-1}-\frac{x+1}{x}-1$

---

4. a) $\frac{2a-3b}{6ab^2}-\frac{2a+3b}{9a^2b}$ b) $\frac{2x+1}{2x}-\frac{x^2+1}{x^2}$

---

4. a) $\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+ab}$ b) $\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{1-x}{4x}$ c) $\frac{2}{x}-\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}$

d) $\frac{y}{9x^2-12xy+4y^2}-\frac{1}{4y-6x}$

---

5. Vereinfache

a) $\frac{a^2b}{30c^3}\cdot\frac{12c^2}{ab^2}$ b) $\frac{4x^2}{9y}:\frac{2xy}{3}$ c) $\frac{4x^2}{y}:(2xy)$ d) $\frac{a^2-ab}{6b^2}\cdot\frac{9b}{a}$ e) $\frac{2x-2}{x^2+x}:\frac{x-1}{4x}$

---

6. a) $\frac{a^2-2a}{a^2-b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{a^2-4}$ b) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-4y^2}:\frac{y^2-x^2}{2x+4y}$ c) $\frac{x}{2x+2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+2x}-\frac{1}{x}$

---

3. a) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{y-x}$ b) $\frac{\frac{x}{x-y}-\frac{x+y}{x}}{\frac{x}{y-x}+1}$

---

4. Fasse jeweils zu einem Bruch zusammen. In welchen Fällen ändert sich durch die Umformung die maximale Definitionsmenge ?

a) $\frac{2}{x} - \frac{x}{2} + x$ b) $1 - \frac{2-y}{y}$ c) $\frac{x}{x-x^2} - \frac{3}{1-x}$

d) $\frac{t}{t-4} + \frac{2}{t} + 1$ e) $\frac{a-3}{a^3-3a} \cdot \frac{2a}{a+3}$ f) $1 - \frac{x-3}{x+2} : \frac{3-x}{x+2}$

BMT 2001

Gegeben ist der Bruchterm : $T(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}$

a) Gib die Definitionsmenge D des Terms an (Grundmenge $\mathbb{Q}$).

b) Fasse die beiden Brüche zusammen und vereinfache.

c) Berechne $T(-4)$
