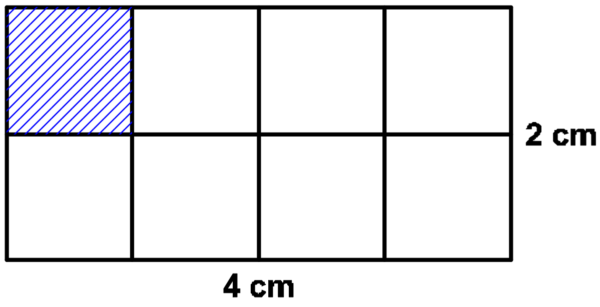
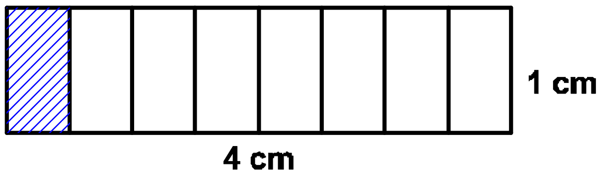
Bruchteile

Anteile gibt man in Bruchschreibweise an.



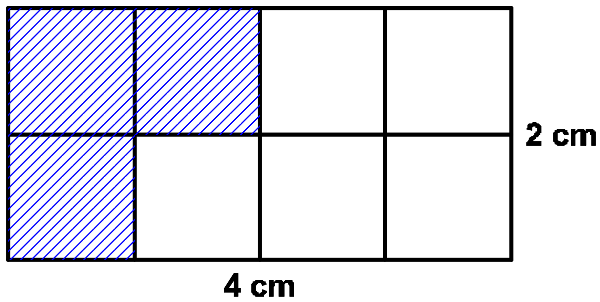
Anteil : $\frac{1}{8}$

Bruchteil : 1 cm^2



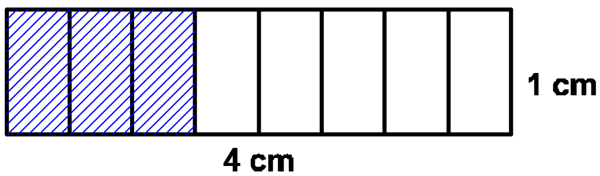
Anteil : $\frac{1}{8}$

Bruchteil : 0,5 cm^2



Anteil : $\frac{3}{8}$

Bruchteil : 3 cm^2



Anteil : $\frac{3}{8}$

Bruchteil : 1,5 cm^2

$\frac{3}{8}$ nennt man einen ***Bruch***.

8 heißt ***Nenner*** des Bruches. Er gibt an, in wie viele Teile die Gesamtgröße geteilt wird.

3 heißt ***Zähler*** des Bruches. Er gibt an, aus wie vielen Teilen der Anteil besteht.

Bestimmung von Anteilen

Beispiele :

a) 3 € von 5 € $= \frac{3}{5}$

b) 3 Cent von 4 € = 3 Cent von 400 Cent $= \frac{3}{400}$

Ist B der Bruchteil einer Größe G gemessen in der gleichen Einheit, dann ist der Anteil von B an G

$$\boxed{\textbf{B von G} = \frac{\textbf{B}}{\textbf{G}}}$$

Bestimmung von Bruchteilen

Beispiele :

a) $\frac{3}{4}$ von 1 € = (1 € : 4) · 3 = (100 Cent : 4) · 3 = 25 Cent · 3 = 75 Cent

b) $\frac{5}{24}$ von 3 h = (3 h : 24) · 5 = (5400 s : 24) · 5 = 225 s ·5 = 1125 s = 18 min 45 s

Den Bruchteil B, den der Anteil $\frac{z}{n}$ einer Größe G ausmacht, ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}\ \textbf{von G} = (\mathbf{G} : \mathbf{n}) \cdot \mathbf{z}}$$

Merke :

Bruchteile von Einheitsgrößen gibt man verkürzt an.

Beispiele :

a) $\frac{1}{4}$ von 1 € $=$ $\frac{1}{4}$ €

b) $\frac{3}{4}$ von 1 g $=$ $\frac{3}{4}$ g

Bestimmung einer Größe aus Anteil und Bruchteil

Beispiele :

a) Herr K. zahlt 720 € Miete, dass sind $\frac{3}{10}$ seines Nettoverdienstes.

Gleichung	**Schlussrechnung**
$\frac{3}{10}$ von G $=$ 720 €	$\frac{3}{10}$G $\hat{=}$ 720 €
(G : 10) $\cdot$ 3 $=$ 720 €	$\frac{1}{10}$G $\hat{=}$ 720 € : 3 $=$ 240 €
G : 10 $=$ 720 € : 3 G : 10 $=$ 240 €	G $\hat{=}$ 240 € $\cdot$ 10 $=$ 2400 €
G $=$ 240 € $\cdot$ 10 G $=$ 2400 €	

Herr K hat einen monatlichen Nettoverdienst von 2400 €.

b) Bei einer Bürgermeisterwahl gingen $\frac{4}{25}$ aller Wahlberechtigten nicht zur Wahl. Es wurden 945 Stimmen abgegeben.

$\frac{21}{25}$ von G $=$ 945 ergibt G $=$ 1125

Es gibt 1125 wahlberechtigte Bürger in der Gemeinde.

Kreisdiagramme

Beispiel :

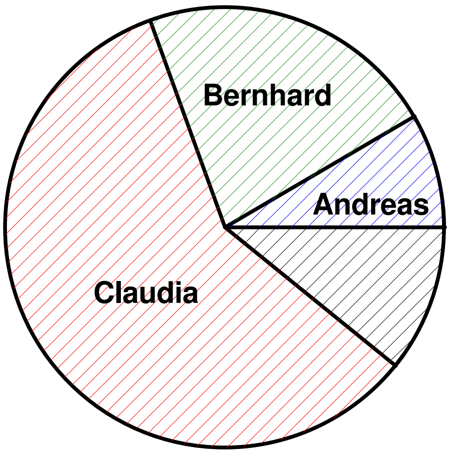
Bei der Klassensprecherwahl erhält Andreas $\frac{1}{12}$. Bernhard $\frac{2}{9}$ und Claudia $\frac{7}{12}$ aller abgegebenen Stimmen.

Der Rest der Stimmen ist ungültig.

$1 \triangleq 360° \;\Rightarrow\; \frac{1}{12} \triangleq 30°$

$1 \triangleq 360° \;\Rightarrow\; \frac{1}{9} \triangleq 40° \;\Rightarrow\; \frac{2}{9} \triangleq 80°$

$1 \triangleq 360° \;\Rightarrow\; \frac{1}{12} \triangleq 72° \;\Rightarrow\; \frac{7}{12} \triangleq 210°$



Relative Häufigkeit

Beispiel :

Eine Klasse erhält ihre Schulaufgabe zurück.

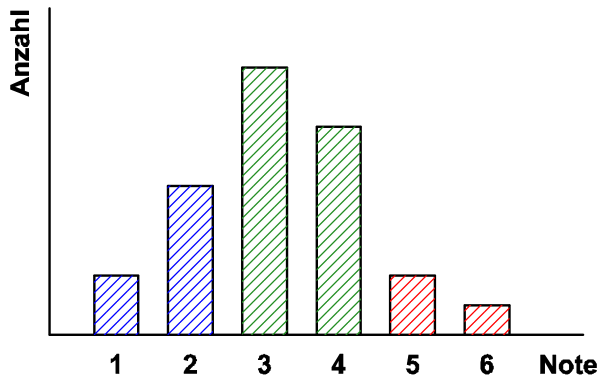
Die Anzahl der Schüler, die in der Mathematikschulaufgabe die Note 1 erhalten, nennt man die absolute Häufigkeit der Note 1 in der Schulaufgabe. Analog gibt es eine absolute Häufigkeit der Note 2; der Note 3 usw.

Den Anteil der Schulaufgaben mit der Note 1 an allen Schulaufgaben nennt man die relative Häufigkeit der Schulaufgaben mit der Note 1.

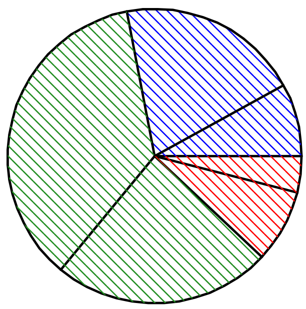
Note	1	2	3	4	5	6	gesamt
absolute Häufigkeit	2	5	9	6	2	1	25
relative Häufigkeit	$\frac{2}{25}=8\%$	$\frac{5}{25}=20\%$	$\frac{9}{25}=36\%$	$\frac{6}{25}=24\%$	$\frac{1}{25}=8\%$	$\frac{1}{25}=4\%$	100%

Veranschaulichung durch Diagramme

Die absolute Häufigkeit der Noten im Säulendiagramm



Die relative Häufigkeit stellt man im Kreisdiagramm dar.



Tritt ein Merkmal bei den n Elementen einer Menge z-mal auf, dann heißt

z die ***absolute Häufigkeit*** dieses Merkmals

und

$\frac{z}{n}$ die ***relative Häufigkeit*** dieses Merkmals.

Aufgaben

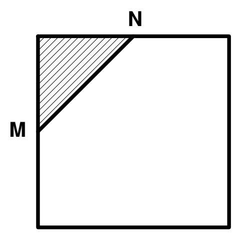
1. Gib in der angegebenen Einheit an

a) $\frac{1}{8}$ km (m) b) $\frac{1}{5}$ t (kg) c) $\frac{1}{5}$ h (min) d) $\frac{1}{20}$ ha (m^2)

---

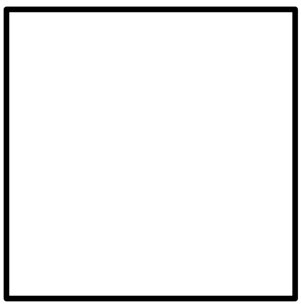
2. Gegeben ist ein Quadrat. M und N sind die Mittelpunkte von zwei Quadratseiten.
Welcher Teil der gesamten Quadratfläche wird durch die schraffierte Fläche dargestellt ?

Begründung



---

3. Schraffiere $\frac{1}{20}$ der Quadratfläche



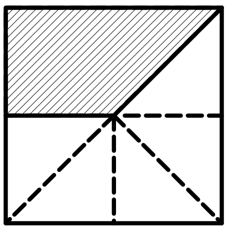
---

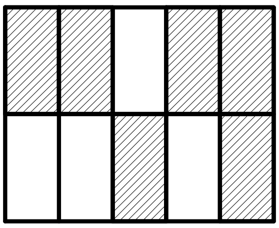
4. Gib in der angegebenen Einheit an

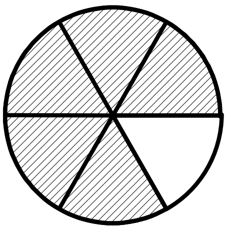
a) $\frac{3}{4}$ m (cm) b) $\frac{3}{8}$ kg (g) c) $\frac{3}{20}$ min (s) d) $\frac{4}{5}$ Ar (dm^2)

---

5. Welcher Bruchteil der Fläche ist jeweils schraffiert ?







---

6. Im Durchschnitt erlernen 76 von 80 Erwachsenen das Autofahren vor Erreichen des 45. Lebensjahres. Welcher Bruchteil ist das ?

---

7. Welchen Bruchteil des Bodens eines 21,6 m^2 großen Zimmers wird von einem 8,1 m^2 großem Teppich bedeckt.

---

8. Bei einem Ausverkauf werden die Preise um $\frac{1}{20}$ reduziert.

   Was war der ursprüngliche Preis eines Fernsehapparats, der jetzt 570 € kostet ?

---

9. Bei einer Kommunalwahl gingen $\frac{4}{5}$ der Wahlberechtigten zur Wahl. 64 Stimmen waren ungültig, das sind $\frac{1}{15}$ der abgegebenen Stimmen.

   Wie viele Leute in der Gemeinde sind wahlberechtigt ?

---

10. Im Durchschnitt sind 15 von 800 gelegten Eiern verdorben.

   a) Gib den Bruchteil verdorbener Eier in einfacher Form an.

   b) Wie viele Eier muss man demnach mindestens kaufen, damit man 800 der gekauften Eier unverdorben sind ?

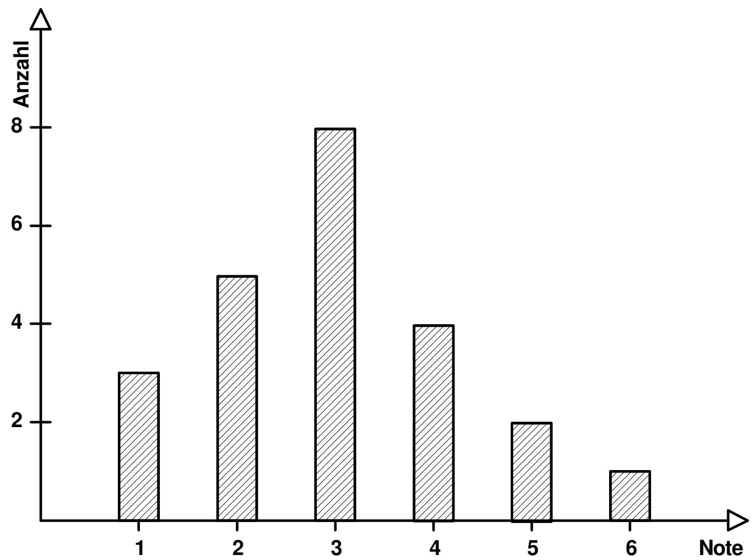
---

11. Wenn Wasser friert, nimmt sein Volumen um 1/11 zu.

   Um welchen Bruchteil nimmt sein Volumen ab, wenn es wieder schmilzt ?

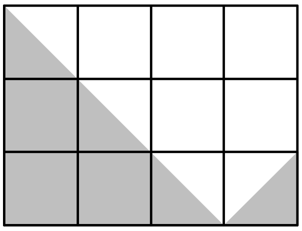
---

12. Das Säulendiagramm zeigt das Ergebnis einer einer Mathematikschulaufgabe.



   Gib den Anteil jeder einzelnen Note an.

BMT 2001

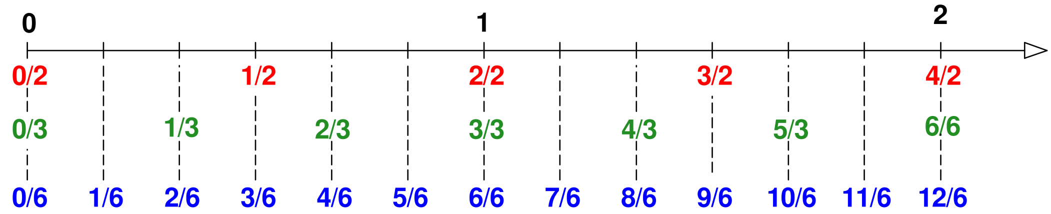


Welcher Bruchteil des Rechtecks ABCD ist grau gefärbt ?

☐ $\frac{7}{5}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{5}{7}$

Bruchzahlen

Anteile lassen sich auf dem Zahlenstrahl angeben.



Damit hat man neue Zahlen die sog. Bruchzahlen entdeckt. Verschiedene Brüche können ein und dieselbe Bruchzahl darstellen. Es ist auch sinnvoll, Anteile größer als 1 einzuführen,

Ein und dieselbe Bruchzahl kann durch verschiedene Brüche dargestellt werden.

So ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = ...$ und $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = ...$

Ist $\frac{z}{n}$ ein Bruch, dann unterscheidet man

a) ***Stammbrüche*** $\boxed{\mathbf{z = 1}}$ wie z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}$

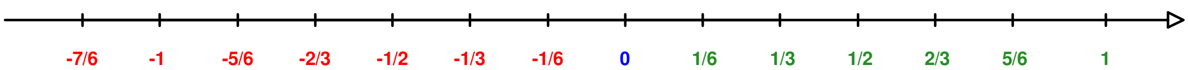
b) ***Echte Brüche*** $\boxed{\mathbf{z < n}}$ wie $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}$. Sie sind kleiner als 1.

c) ***Scheinbrüche*** . Sie stellen natürliche Zahlen dar wie z. B $\frac{4}{4} = 1, \frac{12}{6} = 2, \frac{9}{3} = 3$

d) ***Unechte Brüche*** $\boxed{\mathbf{z > n\,, z \nmid n}}$ wie z. B. $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}, \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$

Sie sind größer als 1 sind, und lassen sich als ***gemischte Zahlen*** schreiben.

Erweitert man den Zahlenstrahl zur Zahlengeraden, dann erhält man zusätzlich die negativen Bruchzahlen.



Die Menge aller Bruchzahlen bezeichnet man als ***rationale Zahlen*** $\mathbb{Q}$.

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist in der Menge der Bruchzahlen enthalten :

$$\boxed{\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$$

Aufgaben

==

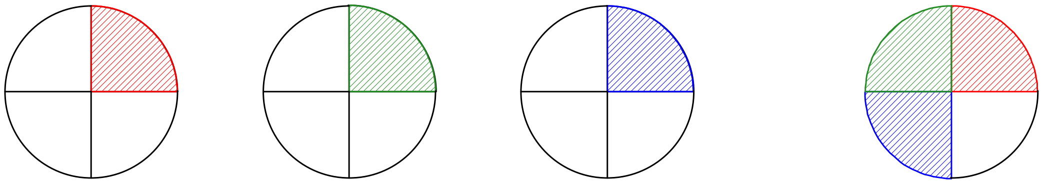
1. Verwandle in einen unechten Bruch : a) $2\frac{3}{4}$ b) $3\frac{1}{5}$ c) $-2\frac{1}{3}$

---

2. Vewandle in eine gemischte Zahl : a) $\frac{17}{3}$ b) $\frac{60}{9}$ c) $-\frac{23}{5}$

Die Division in $\mathbb{Q}$

Drei Ganze lassen sich mit Hilfe der Bruchzahlen durch Vier teilen (vierteln).



$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

Sinnvoll ist daher auch

$-3 : 4 = -\frac{3}{4}$, $3 : \left(-4\right) = -\frac{3}{4}$ und $-3 : \left(-4\right) = \frac{3}{4}$

zu rechnen.

In der Menge $\mathbb{Q}$ ist die Division $z : n$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ durchführbar. Es ist

$$\boxed{\mathbf{z : n = \frac{z}{n}}}$$

Beispiele .

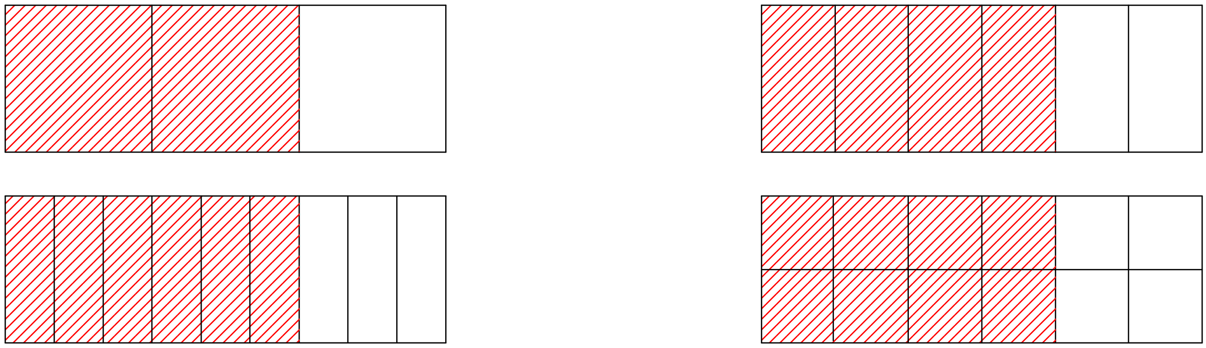
a) $13 : 5 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

b) $-5 : 8 = -\frac{5}{8}$

Speziell gilt $1 : z = \frac{1}{z}$. Man nennt $\frac{1}{z}$ den **Kehrwert** oder den **Kehrbruch** von z.

Die Zahl 0 hat keinen Kehrbruch.

Erweitern und Kürzen von Brüchen



Es ist $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$; $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}$ usw.

Erweitern :

Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und den Nenner des Bruches mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

$$\boxed{\mathbf{\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}}} \quad \mathbf{z \in \mathbb{Z}, n, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}}$$

Umgekehrt gilt :

Kürzen :

Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und den Nenner des Bruches durch dieselbe natürliche Zahl dividiert.

$$\boxed{\mathbf{\frac{z}{n} \overset{k}{=} \frac{z : k}{n : k}}} \quad \mathbf{z \in \mathbb{Z}, n, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}}$$

Beispiele :

a) $\frac{6}{8} \underset{2}{=} \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{132}{180} \underset{4}{=} \frac{132:4}{180:4} = \frac{33}{45} \underset{3}{=} \frac{11}{15}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{132}{180} \underset{12}{=} \frac{11}{15}$

Beachte :

Es ist $\frac{6 \cdot 4}{45} \underset{3}{=} \frac{2 \cdot 4}{15} = \frac{8}{15}$, jedoch $\frac{6+4}{45} = \frac{10}{45} \underset{5}{=} \frac{2}{9}$

Bemerkungen :

a) Ein Bruch heißt ***vollständig gekürz***t, wenn Zähler und Nenner ***teilerfremd*** sind.

b) Gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner findet man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln oder der Primfaktorzerlegung von z und n

c) Die größte Zahl k mit der man kürzen kann ist $k_{max} = ggT(z; n)$

Aufgaben

1. Erweitere auf den Nenner 24 : a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $-\frac{3}{8}$

----

2. Kürze vollständig : a) $\frac{36}{90}$ b) $\frac{75}{120}$ c) $-\frac{126}{270}$

----

3. Ein Bruch ist gleich $\frac{2}{7}$. Die Summe aus seinem Zähler und seinem Nenner beträgt 63.

Wie lautet der Bruch ?

Größenvergleich von Brüchen

Es ist $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$

Sind zwei Brüche nennergleichen (**gleichnamig**), dann stellt der mit dem größeren Zähler die größere Zahl dar.

$$\boxed{\mathbf{\frac{z_1}{n} > \frac{z_2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 > z_2}}$$

Es ist $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$

Sind zwei Brüche zählergleich, dann stellt der mit dem kleineren Nenner die größere Zahl dar.

$$\boxed{\mathbf{\frac{z}{n_1} > \frac{z}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad n_1 < n_2}}$$

Beliebige Brüche vergleicht man, indem man sie so erweitert, dass sie nenner- oder zählergleich sind.

Beispiel :

Zum Vergleich von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ rechnet man

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} \quad \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Als gemeinsamen Nenner für mehrere Brüche wählt man meist kleinste gemeinsame Vielfache (**kgV**) der Nenner (**Hauptnenner**).

Das kgV bestimmt man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgaben

1. Ordne die Zahlen $\frac{5}{12}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$ der Größe nach in einer fallenden Ungleichungskette

---

2. Bestimme alle natürlichen Zahlen x mit $\frac{7}{12} < \frac{x}{18} < \frac{17}{24}$

Das Rechnen mit positiven Brüchen

Addition und Subtraktion

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9} = \frac{5+2}{9} = \frac{7}{9} \qquad \frac{5}{9}-\frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\boxed{\mathbf{\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}} \qquad \boxed{\mathbf{\frac{a}{c}-\frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}}$$

Sind die Brüche ungleichnamig, dann macht man sie gleichnamig.

Beispiel :

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{3} = \frac{9}{24}+\frac{16}{24} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$$

Addiert oder subtrahiert man gemischte Zahlen, dann kann man das Assoziativgesetz benutzen.

$$2\frac{3}{4}+3\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}+3\frac{2}{4} = \left(2+\frac{3}{4}\right)+\left(3+\frac{2}{4}\right) = \left(2+3\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right) = 5+\frac{5}{4} = 5\frac{5}{4} = 6\frac{1}{4}$$

Kurz $2\frac{3}{4}+3\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}+3\frac{2}{4} = 5\frac{5}{4} = 6\frac{1}{4}$

$$3\frac{4}{5} - 1\frac{2}{3} = 3\frac{12}{15}-1\frac{10}{15} = 2\frac{2}{15}$$

$$5\frac{2}{3}-3\frac{4}{5} = 5\frac{10}{15}-3\frac{12}{15} = 4\frac{25}{15}-3\frac{12}{15} = 1\frac{13}{15}$$

Multiplikation

$$3\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5} = \frac{12}{5} = \frac{3\cdot 4}{5}$$

$$\frac{3}{4}\cdot 5 = 5\cdot\frac{3}{4} = \frac{5\cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem sein Zähler mit der natürlichen Zahl multipliziert wird und der Nenner beibehalten wird.

$$\boxed{\mathbf{\frac{a}{b}\cdot n = n\cdot\frac{a}{b} = \frac{n\cdot a}{b}}} \quad a, b, n \in \mathbb{N}, b \neq 0$$

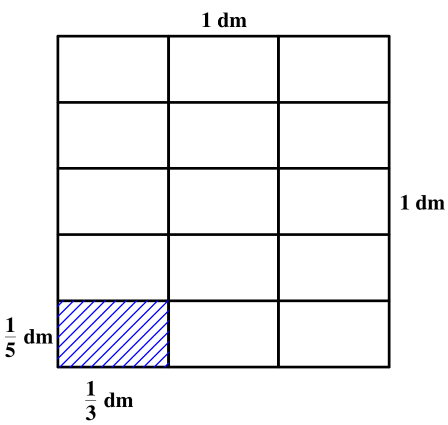
Beim Vervielfachen gemischter Zahlen lässt sich das Distributivgesetz benützen.

$$2\frac{3}{4}\cdot 5 = 10\frac{15}{4} = 13\frac{3}{4}2\frac{3}{4}\cdot 5 = \frac{11}{4}\cdot 5 = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$$

oder

$$2\frac{3}{4}\cdot 5 = \left(2+\frac{3}{4}\right)\cdot 5 = 2\cdot 5+\frac{3}{4}\cdot 5 = 10+\frac{15}{4} = 10+3\frac{3}{4} = 13\frac{3}{3}$$

Kurz $2\frac{3}{4}\cdot 5 = 10\frac{15}{4} = 13\frac{3}{4}$



Die Figur zeigt :

Der Flächeninhalt eines Rechteck mit der Länge $\frac{1}{3}$ dm und der Breite $\frac{1}{5}$ dm beträgt $\frac{1}{15}$ dm^2.

Deshalb ist $\frac{1}{3}$ dm $\cdot \frac{1}{5}$ dm $= \frac{1}{15}$ dm^2 bzw. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

Damit ist sinnvoll

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)\left(4 \cdot \frac{1}{5}\right) = (2 \cdot 4) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) = (2 \cdot 4) \cdot \frac{1}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

Brüche werden miteinander multipliziert,indem ihre Zähler und ihre Nenner multipliziert.

$$\boxed{\mathbf{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

Gemischte Zahlen werden vor der Produktbildung in unechte Brüche verwandelt.

a) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

b) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

Division

Es ist

$$\frac{6}{25} : 2 = \frac{6:2}{25} = \frac{3}{25}$$

$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{6}{15} : 3 = \frac{2}{15} = \frac{2}{5 \cdot 3}$$

> Ein Bruch wird durch eine natürliche Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler durch diese Zahl dividiert oder den den Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Beachte :

a) $1\frac{2}{3} : 4 = \frac{5}{3} : 4 = \frac{5}{12}$

b) $8\frac{4}{5} : 3 = \left(6 + 2\frac{4}{5}\right) : 3 = 6 : 3 + \frac{14}{5} : 3 = 2\frac{14}{15}$

Es ist

$$\frac{6}{25} : \frac{2}{25} = 6 : 2 = 3$$

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{20} : \frac{15}{20} = 8 : 15 = \frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

> Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.
>
> $$\boxed{\mathbf{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}}$$

Beachte :

a) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$ b) $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$

c) $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
