VI. Integralrechnung 2

==

6.1 Integrationsmethoden

Mit den bisherigen Integrationregeln lassen lassen sich nur wenige, elementare Funktionen integrieren. Jedoch führen die Differentiationsregeln für Produkte von Funktionen (Produktregel) und die Verknüpfung von Funktionen (Kettenregel) auf neue Möglichkeiten der Integration.

6.1.1. Die partielle Integration

Sind u und v auf [a;b] differenzierbare Funktionen, dann gilt

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Leftrightarrow \quad u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' \quad .$

Bildung des unbestimmten Integrals auf beiden Seiten ergibt :

$\int u' \cdot v dx = \int (u \cdot v)' dx - \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$ mit der Integrationsvariablen x.

Partielle Integration :

$$\boxed{\int [u'(x) \cdot v(x)] dx = u \cdot v - \int [u(x) \cdot v'(x) dx}$$

Anwendungen :

----

1. Typ Abräumen

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Unbestimmtes Integral :

$u'(x) := e^x \Rightarrow u(x) = e^x$

und

$v(x) := x \Rightarrow v'(x) = 1$ ergibt $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$

2. Typ Faktor 1

$$\int_1^2 \ln x dx = \left[x\ln x - x \right]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2\ln 2 - 1$$

Unbestimmtes Integral :

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$$

$u'(x) := 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x$ und $v(x) := \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}$ ergibt

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$$

---

3. Typ Phoenix

$$\int_0^\pi e^x \cdot \sin x = \left[\frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x) \right]_0^\pi = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$$

Unbestimmtes Integral :

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \sin x e^x - \int e^x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot e^x - \left[e^x \cdot \cos x - \int (-e^x \cdot \sin x) dx \right] =$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C'$$

und damit

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x e^x - e^x \cdot \cos x) + C$$

Bemerkungen :

a) Bei der Berechnung bestimmter Integralen sollte man zuerst immer das unbestimmte Integral ermitteln.

b) Die partielle Integration benützt **man meist** dann, wenn sich der Integrand als **Produkt** schreiben lässt, wobei ein Faktor der Term einer transzendenten Funktion ist

---

6.1.2 Die Substitutionsmethode

Beispiel :

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Mit $u := \sin x$ folgt nach der Kettenregel

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Integration mit Substitution :

Ist $f\left[g(x)\right]$ der Funktionsterm der Verknüpfung $f \circ g$, dann gilt

$$\boxed{\int \mathbf{f}\left[\mathbf{g(x)}\right] \cdot \mathbf{g'(x)dx} = \int \mathbf{f(u)du}} \text{ mit } u = g(x)$$

Merkregel :

Mit $u = g(x)$ ist $g'(x) = \frac{du}{dx}$ d.h. $\boxed{\int \mathbf{f(u)}\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(u)du}}$

Bemerkung :

Diese Art der Substitution verwendet man, wenn man im Integranden einen Funktionterm $g(x)$ und den Ableitungsterm $g'(x)$ erkennt.

Man ersetzt $g(x)$ durch u, streicht $g'(x)$ und integriert nach u. Anschließend wird die Substitution rückgängig gemacht.

Sonderfall : Logarithmische Integration

Satz :

Sei f eine auf einem Intervall definierte und differenzierbare Funktion und ohne Nullstelle. Dann gilt :

$$\boxed{\int \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{f(x)}}\mathbf{dx} = \mathbf{ln}\left|\mathbf{f(x)}\right| + \mathbf{C}}$$

Beispiele :

a) $\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C' =$

$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3 + C$

mit der Substitution $u = g(x) = 1-x^2$ und damit $g'(x) = u' = -2x$

b) $\int\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln\left|u\right| + C' = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

mit der Substitution $u = g(x) = 1+x^2$ und damit $g'(x) = u' = 2x$

c) $\int\frac{e^x}{1-e^x}dx = -\int\frac{-e^x}{1-e^x}dx = -\int\frac{1}{u}du = -\ln\left|u\right| + C' = -\ln\left|1-e^x\right| + C$

mit der Substitution $u = g(x) = 1-e^x$ und damit $g'(x) = u' = -e^x$

d) $\int x\cdot\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \ln u dx = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln u - \int u\cdot\frac{1}{u}du\right] =$

$\frac{1}{2}\left[u\cdot\ln u - u + C'\right] = \frac{1}{2}(1+x^2)\cdot\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$

oder

$\int x\cdot\ln(x^2+1)dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \int\frac{x^3}{x^2+1}dx =$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x^2) - \int(x+\frac{x}{x^2+1})dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx =$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Umgekehrt ergibt sich

Satz :

Ist x eine differenzierbare Funktion der Variablen u, dann gilt :

$$\boxed{\int \mathbf{f(x)dx} = \int \mathbf{f(u)} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{du}} \mathbf{du}}$$

Beispiel 1 : Bestimmung von $\int \frac{x^2}{(1+x)^4} dx$

1. Substitution und Auflösen nach x : $u = 1 + x \Rightarrow x = u - 1$

2. Ableiten : $\frac{dx}{du} = 1$

3. Einsetzen, Integration und Rücksubstituion :

$$\int \frac{(u-1)^2}{u^4} = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^4} du = \int (\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^4}) du = \int (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4} du =$$

$$= -u^{-1} + u^{-2} - \frac{1}{3} u^{-3} + C' = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{3(1+x)^3} + C$$

Beispiel 2 : Bestimmung von $\int x\sqrt{1+x}dx$

1. $u = 1 + x \Rightarrow x = u - 1$

2. $\frac{dx}{du} = 1$

3. $\int x\sqrt{1+x}dx = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C' =$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + C$$

Beispiel 3 : Bestimmung von $\int x\ln(x+1)dx$

1. $u = 1+x \Rightarrow x = u-1$

2. $\frac{dx}{du} = 1$

3. $\int x\ln(x+1)dx = \int (u-1)\ln u du = \int (u\ln u - \ln u)du = \frac{u^2}{2}\ln u - \int \frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{u}du - u\ln u + \int u\cdot\frac{1}{u}du =$

$$= \frac{u^2}{2}\ln u - \frac{u^2}{4} - u\ln u + u + C' = \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} - (x+1)\ln(x+1) + x + C$$

Bemerkung :

Diese Art der Substitution wird verwendet, um

a) Nenner von gebrochen-rationalen Funktionen

b) Radikanden von Wurzelfunktionen

c) Argumente transzendenter Funktionen

zu vereinfachen.

6.2 Uneigentliche Integrale

Unendlich ausgedehnte Flächen unter dem Graphen einer Funktion können auftreten, wenn

a) die Funktion eine Unendlichkeitsstelle besitzt

b) die Ordinatengrenzen im Unendlichen liegen.

Ob man diesen unendlich ausgedehnten Flächen einen endlichen Inhalt zuschreiben kann, entscheidet man durch einen Grenzwertprozess, der auf den Begriff des uneigentlichen Integrals führt.

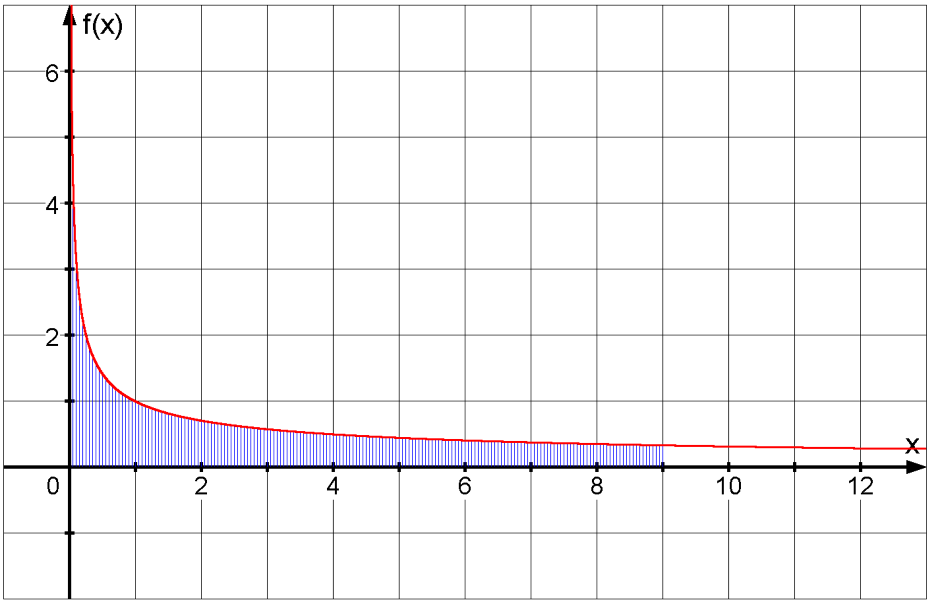
a) Der Integrand wird unendlich

Beispiel :

Untersuche, ob die die unendlich ausgedehnte Fläche, die vom Graphen der Funktion,

$$f : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}, \; D = \mathbb{R}^{+},$$

der x-und der y-Achse sowie der zu $x = 9$ gehörenden Ordinate eingeschlossen wird, einen endlichen Inhalt A hat.



Sei A(k) der Inhalt der endlichen Fläche, die vom Graphen, der x-Achse und den zu

$x = k, \; 0 < k < 9$, und zu $x = 9$ gehörenden Ordinaten eingeschlossen wird. Es ist

$$A(k) = \int_k^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_k^9 = 6 - 2\sqrt{k}$$

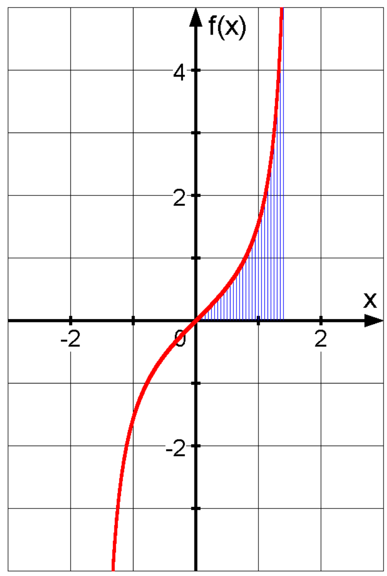
Es ist $\lim\limits_{k \to 0} A(k) = \lim\limits_{k \to 0} (3 - 2\sqrt{k}\,) = 3 = A.$

Man schreibt

$$A = \lim_{k \to 0} \int_k^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$$

und nennt $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ein **uneigentliches, konvergentes Integral**.

Beispiel :



Wir untersuchen, ob die unendlich ausgedehnte Fläche, die der Graph der Tangensfunktion mit der x-Achse und seiner vertikalen Asymptote

$$x = \frac{\pi}{2}$$

einschließt, einen endlichen Inhalt hat.

Es ist

$$A(k) = \int_0^k \tan x\,dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^k = -\ln|\cos k| \quad , 0 < k < \frac{\pi}{2}$$

Also

$$A = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}} A(k) = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}} (-\ln|\cos k|\,) = \infty$$

Die Fläche hat keinen endlichen Inhalt.

Man schreibt

$$A = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}} \int_0^k \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx = \infty$$

und nennt

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ ein **uneigentliches, divergentes Integral**.

Definition :

Ist f in]a;b] stetig und gilt $\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, dann heißt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{k \to a+0} \int_k^b f(x)dx}$$

uneigentliches Integral.

Analog definiert man das uneigentliche Integral für die obere Grenze b.

b) Die Intervallgrenzen liegen im Unendlichen

Definition :

Ist f in [a; ∞[stetig , dann heißt

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{k \to \infty} \int_a^k f(x)dx}$$

uneigentliches Integral.

Analog definiert man das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Bemerkungen :

a) Ist f in $\mathbb{R}$ stetig, dann setzt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \text{ mit } -\infty < a < \infty,$$

wobei man zeigen kann, dass die Definition unabhängig von der Wahl von a ist

b) Analog definiert man für ein in]a; b[stetiges f mit $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \pm\infty$

$$\int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx \text{ mit } c \in \;]a; b[,$$

wobei man zeigen kann, dass die Definition unabhängig von der Wahl von c ist.

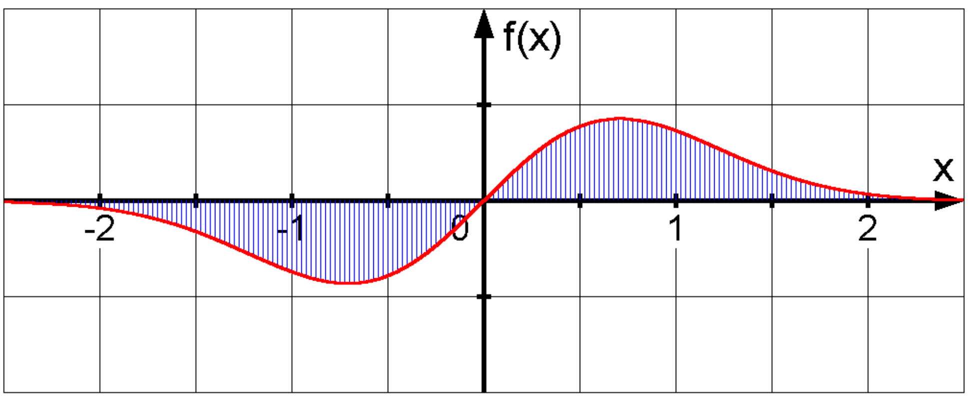
c) Nur für positive Funktionen kann der Wert des uneigentlichen Integrals als Flächeninhalt gedeutet werden.

Beispiel :

Wie groß ist der Inhalt der unendlich ausgedehnten Fläche, die Graph von

$f: x \to xe^{-x^2}, D = \mathbb{R},$

im 1. Quadranten mit der x-Achse einschließt ?



$$A(k) = \int_{0}^{k} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-k^2} \text{ und } \lim_{k \to 0} A(k) = \frac{1}{2}$$