II. Der natürliche Logarithmus

==

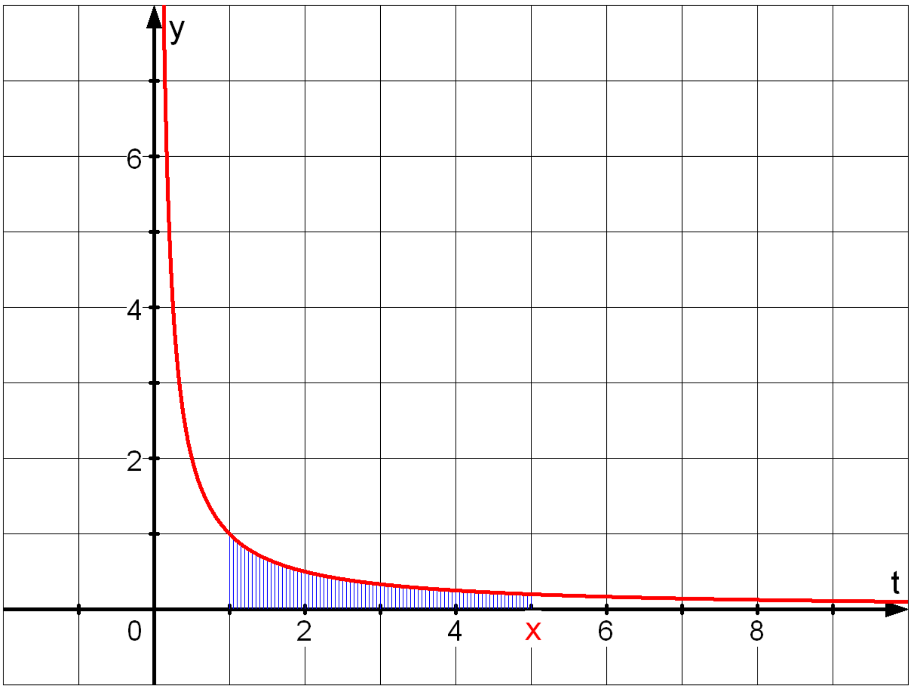
2.1 Definition und Identifizierung

Aus der Menge der Stammfunktionen der Funktion $f : x \to \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R}^+$ betrachten wir die Funktion

$$\mathbf{L : x \to L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \, , D_L = \mathbb{R}^+}$$

Eigenschaften der Funktion L :

1. Geometrische Bedeutung



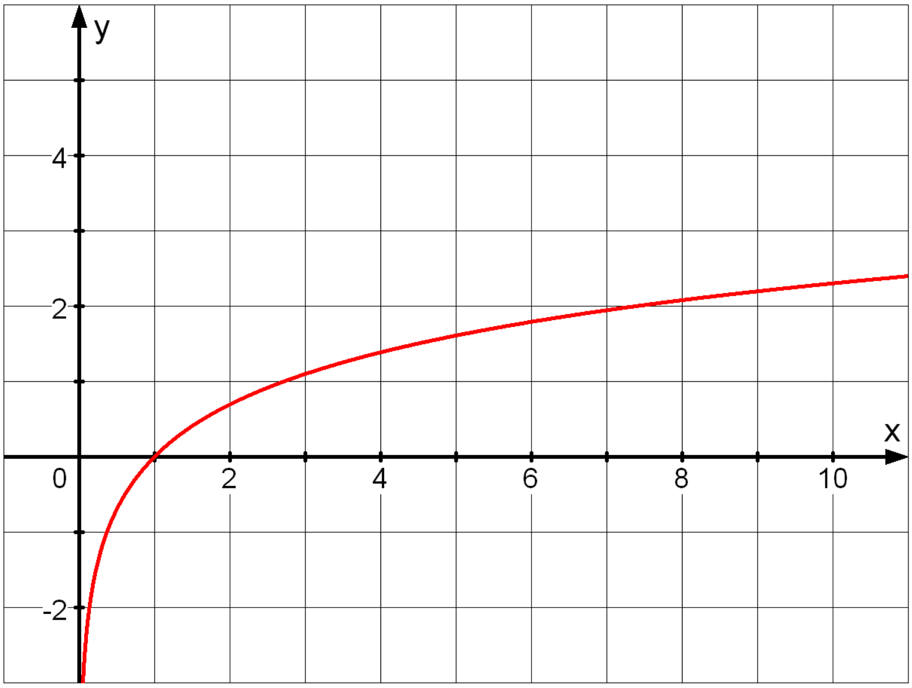
2. Nullstellen und Vorzeichenverhalten

$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$L(x) < 0$	$L(1) = 0$	$L(x) > 0$

3. Monotonie

$L'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall\, x \in D_L \Rightarrow$ L ist streng monoton wachsend

4. Der Graph von L(x)



5. Die charakteristische Gleichung von L(x)

Sei die Funktion L_1 definiert durch $L_1 : x \to L(ax)$.

$$\Rightarrow \quad L_1'(x) = L'(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad L(ax) = L(x) + C$$

$x = 1$ eingesetzt ergibt $L(a) = L(1) + C \quad \Rightarrow \quad C = L(a)$

$$\Rightarrow \quad L(ax) = L(x) + L(a)$$

$x = b$ eingesetzt ergibt schließlich

$$\boxed{\mathbf{L(ab) = L(a) + L(b)}} \; (1)$$

$a = \frac{c}{d}$ und $b = d$ eingesetzt ergibt $L(\frac{c}{d} \cdot d) = L(c) = L(\frac{c}{d}) + L(d)$ und damit

$$\boxed{\mathbf{L(\frac{c}{d}) = L(c) - L(d)}} \; (2)$$

Aus (1) ergibt sich

$$L(a^n) = L(a \cdot ... \cdot a) = L(a) + ... + L(a) = n \cdot L(a)$$

$$L(a^{-m}) + L(a^m) = L(a^{-m} \cdot a^m) = L(1) = 0 \text{ also } L(a^{-m}) = -mL(a) \text{ mit } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Für rationale Exponenten folgt

$$q \cdot L(a^{\frac{p}{q}}) = L[(a^{\frac{p}{q}})^q] = L(a^p) = p \cdot L(a) \text{ also } L(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \cdot L(a)$$

Die Stetigkeit von L ergibt dann schließlich

$$\boxed{\mathbf{L(x^r) = r \cdot L(x) \quad \forall\, r \in \mathbb{R}}} \; (3)$$

(3) heißt **charakteristische Gleichung von L**

6. Wertebereich von L

$$L(2^n) = n \cdot L(2) \to \infty \text{ falls } n \to \infty \quad L(2^{-n}) = -n \cdot L(2) \to -\infty \text{ falls } n \to \infty$$

Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ergibt dann $\mathbf{W_L} = \mathbb{R}$.

7. Identifizierung von L(x)

Wir stellen das Argument der Funktion L als Potenz zur Basis b dar.

$$\text{Sei } x = b^{\log_b(x)} \quad \Rightarrow \quad L(x) = L(b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot L(b)$$

Wählt man b so, dass $L(b) = 1$ und nennt diese Basis e, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{L(x) = \log_e x}}.$$

Man nennt $\log_e(x)$ den **natürlichen Logarithmus** von x und schreibt

$$\boxed{\mathbf{L(x) = \log_e x = \ln x}}.$$

Definition :

Die Funktion $\mathbf{ln : x \rightarrow lnx}$, $\mathbf{D} = \mathbb{R}^+$ heißt **natürliche Logarithmusfunktion.**

Die durch $L(e) = 1$ festgelegte Basis ist die **Eulersche Zahl** $e = \mathbf{2{,}7182818284.....}$

2.2 Zusammenfassung und Ergänzung

Die Funktion **ln** : $x \rightarrow \ln x$, $D = \mathbb{R}^+$ ist **Stammfunktion** von $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

1. Nullstellen

$$\boxed{\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1}$$

2. Grenzverhalten

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$
$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$$

3. Ableitung

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

4. Funktionsgleichungen

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}, x, y > 0$$
$$\ln(x^r] = r \cdot \ln x$$

5. Wachstumsverhalten

Ist $r > 0$, dann gilt
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{\ln x} = \infty$$

d.h. die ln-Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion mit positivem Exponenten.

Beweis : l Hospital

2.3 Integration mit dem Logarithmus

---

1. Die Stammfunktionen von $\mathbf{f : x \to \frac{1}{x}}$, $\mathbf{D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}}$

Satz :

Es gilt : $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\left|x\right| + C}$

Beweis :

$x > 0 : \ln\left|x\right| = \ln x \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0 : \ln\left|x\right| = \ln(-x) \Rightarrow \left[\ln(-x)\right]' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

2. Logarithmische Integration

Satz :

Sei f eine auf einem Intervall definierte und differenzierbare Funktion und ohne Nullstelle.
Dann gilt :

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + C}$$

Beweis : Durch Nachrechnen analog zu 1.

Beispiel 1 :

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C$$

Beispiel 2 :

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$$

Beispiel 3 :

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln\left|\ln x\right| + C$$

Beispiel 4 :

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$$

3. Partialbruchzerlegung

Vielfach können Bruchterme in Summen einfacher zu integrierender Bruchterme zerlegt werden.

Beispiel 1 :

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int (\frac{0{,}5}{x-1} - \frac{0{,}5}{x+1})dx = 0{,}5\ln\left|x-1\right| - 0{,}5\ln\left|x+1\right| + C$$

Ansatz :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow \frac{a(x+1) - b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a-b)x+(a+b)}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

Also ist $a - b = 0 \wedge a + b = 1 \Rightarrow a = b = 0{,}5$

Beispiel 2 :

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx = \int (1+\frac{x+1}{x^2-x})dx = \int (1+\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x})dx = x + 2\ln\left|x-1\right| - \ln\left|x\right| + C$$

Polynomdivision : $(x^2+1) : (x^2-x) = 1+\frac{x+1}{x^2-x}$

Faktorzerlegung des Nenners : $x^2-x = x(x-1)$

Ansatz :

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} \Rightarrow \frac{ax + b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x-b}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Also ist $a + b = 1 \wedge -b = 1 \Rightarrow b = -1$ und $a = 2$

Beispiel 3 :

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx = \int (\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx = 2\ln\left|x-1\right| - \ln\left|x\right| + \frac{1}{x} + C$$

Faktorzerlegung des Nenners : $x^3-x^2 = x^2(x-1)$

Ansatz :

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \frac{ax^2+bx(x-1)+c(x-1)}{x^3-x^2} = \frac{(a+b)x^2+(c-b)x-c}{x^3-x^2}q$$

$\Rightarrow a + b = 1 \wedge c-b = 0 \wedge -c = 1 \Leftrightarrow c = -1, b = -1, a = 2$

Beachte :

Tritt ein Faktor des Nenners in einer höheren Potenz als 1 auf, dann treten in der Zerlegung alle niedrigeren Potenzen des Faktors auch auf.