Kapitel 20

Die Gamma Funktion

Definition
Die Gamma Funktion $\Gamma(x)$ ist definiert durch :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \ , \quad x > 0$$

Satz

a) Es gilt : $\Gamma(1) = 1$

b) Das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, ist für alle $x > 0$ konvergent, d.h. $\Gamma(x)$ ist für alle $x > 0$ definiert

c) Es gilt : $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

d) Es gilt : $\Gamma(n+1) = n!$

Beweis

a) $\Gamma(1) \ = \int\limits_0^\infty e^{-t} dt = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R e^{-t} dt = \lim\limits_{R\to\infty} |_0^R \ = \ \lim\limits_{R\to\infty} (-e^{-R} + 1) = 1$

b) 1. Für $x = 1 \Rightarrow$ gilt (Teil a) $\Gamma(1) = 1$

2. Sei $x > 1 \ \Rightarrow \ x - 1 > 0 \ \Rightarrow \ \int\limits_0^{t_0} e^{-t} t^{x-1} dt$ ist für $t_0 \in \mathbb{R}$, d.h. t_0 endlich ein „normales “ Integral.

Ferner gilt : $0 \ < e^{-t} \cdot t^{x+1} \ \leq \ e^{-t} \cdot t^{[x]+2} \ \Rightarrow$

$$0 \ \leq \lim_{t\to\infty} e^{-t} \cdot t^{x+1} \ \leq \ \lim_{t\to\infty} e^{-t} \cdot t^{[x]+2}$$

$$= \ \lim_{t\to\infty} \frac{t^{[x]+2}}{e^t} \ = \ \lim_{t\to\infty} \frac{([x]+2)!}{e^t} \ = \ 0 \qquad (*)$$

Die letzte Formel bekommt man, wenn man $([x]+2)$-mal L'Hospital anwendet. Ferner ist die Funktion $e^{-t} \cdot t^{x+1}$ positiv und monoton fallend für

$t > x+1$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \cdot t^{x+1}\right) &= -e^{-t} \cdot t^{x+1} + e^{-t}(x+1)t^x \\ &= -e^{-t} \cdot t^x(t-(x+1)) < 0 \quad \text{für} \quad t > x+1 \end{aligned} \qquad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt : Es gibt ein $t_0 > x+1$ mit

$$e^{-t} \cdot t^{x+1} < 1 \quad \forall\, t > t_0 \Rightarrow$$

$$e^{-t} \cdot t^{x-1} < \frac{1}{t^2} \quad \forall\, t > t_0 \qquad (***)$$

Mit (***) folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_{t_0}^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \\ &\leq \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_{t_0}^\infty \frac{dt}{t^2} = \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \lim_{R \to \infty} \int_{t_0}^R \frac{dt}{t^2} \\ &= \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \lim_{R \to \infty} \frac{-1}{t}\Big|_{t_0}^R = \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \lim_{R \to \infty} \left(\frac{-1}{R} + \frac{1}{t_0}\right) \\ &= \int_0^{t_0} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \frac{1}{t_0} \end{aligned}$$

3. Sei $0 < x < 1$, dann gilt :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt + \lim_{R \to \infty} \int_1^R e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} dt + \lim_{R \to \infty} \int_1^R e^{-t} dt \overset{(*)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{t^x}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 + \lim_{R \to \infty} (-e^{-t})\Big|_1^R \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}\right) + \lim_{R \to \infty} (-e^{-R} + \frac{1}{e}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$(*) \qquad t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \leq 1\,, \quad \forall\, t \geq 1$$

c) Partielle Integration:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^x\, dt = \lim_{R \to \infty, \varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^R e^{-t} \cdot t^x\, dt$$

mit $u' = e^{-t}$, $u = -e^{-t}$, $v = t^x \Rightarrow v' = xt^{x-1} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{R \to \infty\,,\,\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{-t}\cdot t^{x}\,dt \\
&= \lim_{R \to \infty\,,\,\varepsilon\to 0} \left((-e^{-t}\cdot t^{x})|_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}\,dt \right) \\
&= \lim_{R \to \infty\,,\,\varepsilon\to 0} -e^{-R}R^{x} + e^{\varepsilon}\cdot \epsilon^{x} + x\cdot \lim_{R\to\infty\,,\epsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt \\
&= 0 + x\cdot\Gamma(x)
\end{aligned}
$$

d) Vollständige Induktion:

Für $n = 0$ gilt $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0\,!$ (Induktionsanfang)

Für $n = 1$ gilt $\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1\,!$

Für n gelte $\Gamma(n+1) = n\,!$ (Induktionsannahme)

Für $(n+1)$ gilt dann :

$\Gamma(n+2) = (n+1)\cdot\Gamma(n) = (n+1)\cdot n\,! = (n+1)!$ (Ind.Beh.+ Bew.)