

Die Fakultät

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

13. September 2003

Dieser Artikel gibt die Definition der „klassischen“ Fakultät und führt von dort aus zunächst zu der Anwendung in Taylor-Reihen und gibt dann einfache Methoden an, darunter die berühmte Stirling'sche Formel, die Fakultät für große Zahlen anzunähern. Im nächsten Schritt wird die Fakultätsdefinition auf reelle und komplexe Zahlen erweitert. Zum Abschluss werden zwei Verwandte der eigentlichen Fakultät vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	4
1 Definition	5
2 Konstanten und die Fakultät	6
3 Eine Approximation	8
4 Die Stirling'sche Formel	9
5 Die Fakultät reeller und komplexer Zahlen	12
6 Die Doppel-Fakultät	14
7 Die Sub-Fakultät	16
8 Aufgaben	17
Index	18

Abbildungsverzeichnis

5.1 Die reelle Fakultätsfunktion $x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$	13
---	----

1 Definition

Auf wieviele Arten kann man die n Elemente einer Menge anordnen? Oder anders gefragt, wieviele *Permutationen* gibt es von n Objekten?

$$n = 0 : \{\}$$

$$n = 1 : \{A\}$$

$$n = 2 : \{A; B\}, \{B; A\}$$

$$n = 3 : \{A; B; C\}, \{A; C; B\}, \{B; A; C\}, \{B; C; A\}, \{C; A; B\}, \{C; B; A\}$$

Für $n = 4$ erhält man schon 24 Permutationen. Wie man sieht, erhält man die Anzahl der Permutationen von n , indem man die Anzahl der Permutationen von $n - 1$ mit n multipliziert. Das ist auch logisch, schließlich kann man die Mengen mit n Elementen bilden, indem man das n -te Element in jeder Permutation einer Menge mit $n - 1$ Elementen an jede beliebige der n Stellen einfügt. Die Anzahl der Permutationen von n Objekten bezeichnet man als *Fakultät* von n , geschrieben $n!$.

Obige Überlegungen führen uns auf die *rekursive Definition*

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n - 1)! & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}.$$

Betrachtet man nur natürliche Zahlen ohne die Null, so kann man das Gleiche auch *iterativ* formulieren als

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Die Größe der Fakultäten wächst sehr rasch. Die Fakultäten von 0 bis 10 sind 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800.

2 Konstanten und die Fakultät

Mit Hilfe der *Taylor-Entwicklung* lassen sich transzendente Funktionen durch Potenzreihen darstellen. Die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(x_0)^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i \\ &= \frac{f(x_0)}{0!} (x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich nun eine Menge wichtiger mathematischer Konstanten sehr schön darstellen. Zunächst erkennt man ziemlich leicht, dass sich für die Taylor-Entwicklung der e-Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ ergibt

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Nun braucht man nur noch $x = 1$ zu setzen und erhält eine Formel für die *Euler'sche Zahl*

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}.$$

Die Euler'sche Zahl ist die Summe der Kehrwerte der Fakultäten von 0 bis $\infty!$ Eine ähnlich einfache Formel ergibt sich mit $x = -1$ für

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Man kann auch die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen in Potenzreihen entwickeln. Hier sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \\ \sinh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \\ \cosh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}. \end{aligned}$$

Man beachte die Ähnlichkeit zwischen $\sin x$ und $\sinh x$ sowie $\cos x$ und $\cosh x$. Setzt man nun $x = 1$, so ergeben sich Ausdrücke für $\sin 1$, $\cos 1$, $\sinh 1$ und $\cosh 1$:

$$\sin 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!},$$

$$\cos 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!},$$

$$\sinh 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!},$$

$$\cosh 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}.$$

3 Eine Approximation

Die Berechnung der Fakultät für große Werte wird schnell sehr rechenintensiv. Besonders wenn es auf den exakten Wert nicht so sehr ankommt, bedient man sich deshalb *Approximationen*. Ein einfaches Verfahren ist das folgende: Wir berechnen für ein natürliches $n > 2$ zunächst exakt

$$\int_2^n \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_2^n - \int_2^n 1 \, dx = n \ln n - 2 \ln 2 - n + 2 = n \ln \frac{n}{e} + 2 \ln \frac{e}{2}.$$

Dann nähern wir das Integral durch Trapeze an. Ist die Schrittweite 1, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \frac{1}{2}(\ln 3 + \ln 4) + \cdots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln n - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n \\ &= \ln n! - \frac{1}{2} \ln(2n). \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$\begin{aligned} n \ln \frac{n}{e} + 2 \ln \frac{e}{2} &\approx \ln n! - \frac{1}{2} \ln(2n) \\ \Rightarrow \ln n! &\approx n \ln \frac{n}{e} + 2 \ln \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \ln(2n) = \ln \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \left(\frac{e}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{2n} \right) \\ \Rightarrow n! &\approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{\frac{e^4}{8} n}. \end{aligned}$$

Damit haben wir unser Ziel, eine für große Zahlen leichter zu berechnende Formel zu finden, erreicht.

4 Die Stirling'sche Formel

Die bekannteste Approximation der Fakultät ist wohl die *Stirling'sche Formel*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

Da sie so wichtig ist, werden wir uns die Mühe machen und sogar eine Fehlerschranke angeben. Und zwar zeigen wir

$$\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Folgen $(n!)$ und $(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n})$ *asymptotisch gleich* sind. Dabei heißen zwei Folgen (a_n) und (b_n) asymptotisch gleich, geschrieben $a_n \sim b_n$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$$

ist, d. h. der relative Fehler geht gegen 0, oder noch anders ausgedrückt: Mit wachsendem n stimmen immer mehr Dezimalstellen der beiden Folgen überein.

Für den Beweis werden wir eine Beziehung brauchen, die an **anderer Stelle** hergeleitet wird, nämlich die *Wallis-Formel*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2 - 1}.$$

Diese schreiben wir zunächst etwas komplizierter als

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j-1)(2j+1)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^4}{(2j-1)(2j)(2j)(2j+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}$$

und ziehen die Wurzel

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{((2n)!) \sqrt{n+1/2}}.$$

Nun betrachten wir die durch

$$x_n := \frac{n! e^n}{\sqrt{nn^n}}$$

definierte Folge. Da diese Folge offenbar durch 0 nach unten beschränkt ist, folgt ihre Konvergenz, wenn wir zeigen können, dass sie monoton fällt. Wir berechnen also den Quotienten

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

Logarithmieren liefert

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln \frac{n+1}{n}.$$

Nun gilt für $|z| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \dots.$$

Für positives z folgt somit

$$\begin{aligned} 2z \leq \ln \frac{1+z}{1-z} &\leq 2 \left(z + \frac{z^3}{3}(1+z^2+z^4+\dots) \right) \\ &= 2 \left(z + \frac{z^3}{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \right) \right) = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} \frac{1}{1-z^2} \right) = 2z + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^3}{1-z^2}. \end{aligned}$$

Mit $z := (2n+1)^{-1}$ ergibt sich

$$\frac{1}{n+1/2} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n+1/2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)((2n+1)^2-1)}.$$

Man erhält so

$$1 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} \leq 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2-1} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n^2+4n}$$

und weiter

$$0 \leq \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Aus der linken Ungleichung folgt die Monotonie. Aus der rechten Ungleichung bekommt man wegen

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

die Abschätzung

$$\ln x_n - \frac{1}{12n} \leq \ln x_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)},$$

die sich sofort zu

$$\ln x_n - \frac{1}{12n} \leq \ln x_{n+m} - \frac{1}{12(n+m)}$$

bzw.

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+m}} \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$$

verallgemeinert. Für den Limes x der x_n gilt somit

$$0 \leq \ln \frac{x_n}{x} \leq \frac{1}{12n}$$

und

$$1 \leq \frac{x_n}{x} \leq \exp \left(\frac{1}{12n} \right).$$

Wir haben nun insgesamt

$$x \leq \frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}} \leq x \exp \left(\frac{1}{12n} \right)$$

gezeigt. Bleibt also nur noch, x zu berechnen. Dazu greifen wir auf das Ergebnis nach Wallis zurück. Mit

$$n! = \frac{x_n n^{n+1/2}}{e^n}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{((2n)!) \sqrt{n+1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} x_n^2 n^{2n+1} e^{2n}}{e^{2n} x_{2n} (2n)^{2n+1/2} \sqrt{n+1/2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_{2n}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

also $x = \sqrt{2\pi}$ und letztendlich die Behauptung

$$\sqrt{2\pi} \leq \frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}} \leq \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{1}{12n} \right).$$

5 Die Fakultät reeller und komplexer Zahlen

Zur Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffs auf reelle Zahlen betrachten wir die Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sie heißt *Gauß'sche Gammafunktion*. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \left[-t^{x-1} e^{-t} \right]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt.$$

Da der Klammerausdruck 0 ist, kann man die Gleichung auch schreiben als

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Hiermit hätten wir bereits eine wichtige Eigenschaft, die eine reelle Fakultätsfunktion erfüllen müsste, nachgewiesen. Damit diese Funktion für natürliche Zahlen die gleichen Ergebnisse liefert, wie unsere ursprüngliche Funktion, muss noch $\Gamma(0) = \Gamma(1) = 1$ sein. Man findet jedoch

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

und damit

$$\Gamma(x) = (x-1)!.$$

Das heißt, wir müssen die Gammafunktion um 1 nach links verschieben. Damit erhalten wir eine Funktion, die für natürliche Zahlen die bekannten Werte liefert, aber auch für reelle Zahlen definiert ist!

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Abb. 5.1 zeigt den Graphen dieser reellen Fakultätsfunktion.

Diese Funktion hat ungerade Pole bei negativen ganzen Zahlen. Ansonsten ist sie für alle reellen Zahlen definiert. Aber nicht nur das: Man kann sogar komplexe Fakultäten berechnen, wenn man x komplex werden lässt. Einzige Ausnahme bilden die negativen ganzen Zahlen.

Einige interessante Werte sind z.B. $0.5! = 0.5\sqrt{\pi}$ und $(-0.5)! = \sqrt{\pi}$.

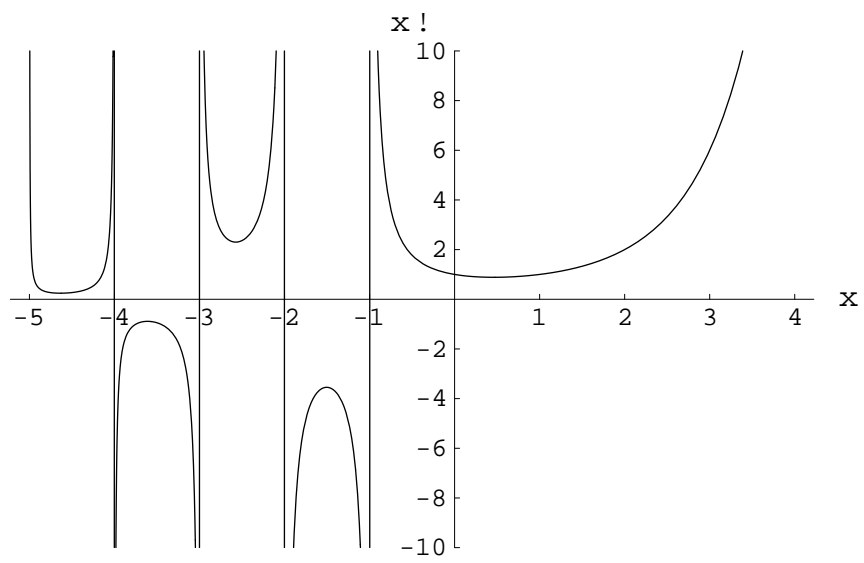


Abbildung 5.1: Die reelle Fakultätsfunktion $x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$.

6 Die Doppel-Fakultät

Die *Doppel-Fakultät* ist eine der Fakultät verwandte Funktion. Anders als bei der gewöhnlichen Fakultät wird hier nicht das Produkt aller natürlichen Zahlen bis n gebildet, sondern nur das jeder zweiten Zahl. Die Definition ist genauer

$$n!! := \begin{cases} n \cdot (n-2)!! & n > 0 \\ 1 & n = -1, 0 \end{cases}.$$

Die Doppel-Fakultäten von 0 bis 10 sind 1, 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, 945, 3840.

Man kann sich nun fragen, welche Beziehungen zwischen der Doppel-Fakultät und der Fakultät bestehen, d. h. wie man die Doppel-Fakultät mit Hilfe der Fakultät berechnen kann. Betrachten wir zunächst die Doppel-Fakultät einer ungeraden Zahl:

$$\begin{aligned} (2n+1)!! \cdot 2^n \cdot n! &= [(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 1] \cdot 2^n \cdot [n \cdot (n-1) \cdots 1] \\ &= [(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 1] \cdot [(2n) \cdot (2n-2) \cdots 2] \\ &= (2n+1) \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &= (2n+1)! \\ \Rightarrow (2n+1)!! &= \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Und nun eine gerade Zahl:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2 \\ &= 2^n \cdot [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1] \\ &= 2^n \cdot n! \\ \Rightarrow (2n)!! &= 2^n \cdot n!. \end{aligned}$$

Einfacher ist das Berechnen der Fakultät über die Doppel-Fakultät, wie folgende Rechnung zeigt. Für ungerades n gilt

$$\frac{n!}{n!!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2}{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 3} = (n-1) \cdot (n-3) \cdots 2 = (n-1)!!,$$

und für gerades n ist

$$\frac{n!}{n!!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2}{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 2} = (n-1) \cdot (n-3) \cdots 3 = (n-1)!!.$$

Also erhält man allgemein

$$n! = n!! \cdot (n-1)!!.$$

Die Doppel-Fakultät ist wie die Fakultät ein Spezialfall der *Multi-Fakultät*. Die k -te Multi-Fakultät bedeutet das Produkt jeder k -ten Zahl bis n . So ist z.B. für $k = 3$

$$n!!! = n \cdot (n-3) \cdot (n-6) \cdots .$$

Die Fakultät erhält man mit $k = 1$ und die Doppel-Fakultät mit $k = 2$.

7 Die Sub-Fakultät

Die Fakultät einer Zahl n gibt die Anzahl der Permutationen von n Objekten an. Die *Sub-Fakultät* gibt dagegen die Anzahl der Permutationen an, bei denen keines der Objekte an seinem ursprünglichen Platz bleibt.

$$n = 1 : \{A\} \rightarrow -$$

$$n = 2 : \{A; B\} \rightarrow \{B; A\}$$

$$n = 3 : \{A; B; C\} \rightarrow \{B; C; A\}, \{C; A; B\}$$

$$n = 4 : \{A; B; C; D\} \rightarrow \{B; A; D; C\}, \{B; C; D; A\}, \{B; D; A; C\}, \\ \{C; A; D; B\}, \{C; D; A; B\}, \{C; D; B; A\}, \\ \{D; A; B; C\}, \{D; C; A; B\}, \{D; C; B; A\}$$

Die Sub-Fakultäten $!n$ von 1 bis 10 sind 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961. Sie berechnen sich nach

$$!n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Da der Summenausdruck ein Näherungswert von $1/e$ ist, kann man auch schreiben

$$!n = \left[\frac{n!}{e} + 0.5 \right].$$

Interessant ist, dass es genau eine Zahl gibt, die gleich der Summe der Sub-Fakultäten ihrer Ziffern ist, und zwar $148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9$.

8 Aufgaben

1. Leite die oben angegebenen Potenzreihenentwicklungen für e^x , $\sin x$ und $\cos x$ her!
2. Untersuche die Konvergenzgeschwindigkeit der unendlichen Summe der Euler'schen Zahl! Weshalb verhält es sich so?
3. Vergleiche die Güte der oben hergeleiteten Approximation für die Fakultät mit der Stirling'schen Formel! Betrachte dazu sehr kleine und sehr große Werte!
4. Zeige, dass gilt: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1!$.
5. Wie kann man die Doppel-Fakultät iterativ definieren?
6. Beweise, dass gilt

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

7. Weise nach:

$$!n = n \cdot !(n - 1) + (-1)^n.$$

8. Zeige:

$$!(n + 1) = n \cdot !(n) + (-1)^{n+1}.$$

Index

Approximation, 8–11

Doppel-Fakultät, 14

Euler'sche Zahl, 6

Fakultäts-Definition

 für komplexe Zahlen, 12

 für reelle Zahlen, 12

 iterativ, 5

 rekursiv, 5

Gauß'sche Gammafunktion, 12

Multi-Fakultät, 15

Permutation, 5, 16

Stirling'sche Formel, 9

Sub-Fakultät, 16

Taylor-Entwicklung, 6