

Teilbarkeit

1. Teiler und Teilmengen

Bleibt beim Dividieren einer Zahl n durch eine Zahl d kein Rest, so heißt d ein **Teiler** von n .

Alle Teiler einer Zahl bilden die Teilermenge dieser Zahl.

Beispiel :

Die Teilermenge T_{18} der Zahl 18 ist gegeben durch $T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

2. Teilbarkeitsregeln

Endstellenregeln :

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie auf 0, 2, 4, 6, oder 8 endet.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn sie auf 00, 25, 50 oder 75 endet.

Die Summe der Ziffern einer Zahl heißt die **Quersumme** der Zahl.

Beispiel :

Die Quersumme von 12309 ist $1 + 2 + 3 + 0 + 9 = 15$

Quersummenregeln :

Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

3. Die Primzahlen

Eine Zahl, die genau zwei Teiler besitzt, die Eins und sich selbst, heißt **Primzahl**.

Sieb des Erathostenes :

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

Jede natürliche Zahl größer als Eins läßt sich in eindeutiger Form in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.

Beispiel :

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

4. Vielfachmengen

Alle Vielfachen einer Zahl bilden die Vielfachmenge dieser Zahl.

Beispiel :

Die Vielfachmenge V_4 der Zahl 4 ist gegeben durch $V_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$

5. Größter gemeinsamer Teiler

Ein Teiler zweier Zahlen heißt *gemeinsamer Teiler* dieser Zahlen.

Unter allen gemeinsamen Teilern zweier Zahlen gibt es einen größten. Man nennt ihn den *größten gemeinsamen Teiler ggT* der beiden Zahlen.

Beispiel :

Der größte gemeinsame Teiler von 36 und 54 ist 18. Man schreibt $\text{ggT}(36; 54) = 18$

6. Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Ein Vielfaches von zwei Zahlen heißt *gemeinsames Vielfaches* dieser Zahlen.

Unter allen gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen gibt es ein kleinstes. Man nennt es das *kleinste gemeinsame Vielfache kgV* der beiden Zahlen.

Beispiel :

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 18 und 12 ist 36. Man schreibt $\text{kgV}(12; 18) = 36$

Aufgaben

1. Bestimme die Teilmenge von 216.

2. Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1980.

3. Zerlege $12^3 \cdot 15^4$ vollständig in Primfaktoren

4. Bestimme $\text{ggT}(336; 504)$

5. Bestimme $\text{ggT}(18^4; 12^6)$

5. Bestimme $\text{kgV}(140; 112)$

6. Zur Teilmenge einer natürlichen Zahl gehören die Zahlen 15 und 12. Welche Zahlen gehören sicherlich noch zur Lösungsmenge ?

7. Bestimme die Lösungsmenge von $\text{kgV}(x; 18) = 108$

8. Für welche natürlichen Zahlen m und n gilt $\text{ggT}(m; n) = 18$ und $\text{kgV}(m; n) = 216$.
Bestimme alle Lösungen.

BMT 2000

Die drei natürlichen Zahlen B , M und T sind verschieden und jeweils größer als 5. Gib eine mögliche Lösung an, wenn folgende Gleichung erfüllt werden soll:

$$B \cdot M \cdot T = 2000$$
