I.Quadratwurzeln

===

1.1 Radizieren

- Ist $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$, dann gibt es eine nichtnegative Zahl r, die quadriert a ergibt.

  Man nennt diese Zahl r die Quadratwurzel von a und schreibt $r = \sqrt{a}$.

  Die Bestimmung der Quadratwurzel r nennt man **Radizieren**.

  a heißt der Radikand der Quadratwurzel.

  Beispiele :

  a) $\sqrt{25} = 5$

  b) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl und kann nur näherungsweise angegegeben werden.

  c) $\sqrt{3^2} = 3$ und $\sqrt{(-3)^2} = 3$

  Für nichtnegative Zahlen a gilt : $\boxed{\sqrt{\mathbf{a}^2} = \mathbf{a}}$

  Man nennt deshalb das Radizieren die Umkehrung des Quadrierens.

  Für beliebige rationale Zahlen gilt : $\boxed{\sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}|}$

  Beispiel :

$$\sqrt{x^2 + 4x + 16} = \sqrt{(x+4)^2} = |x+4| = \begin{cases} x+4\text{ , für } x \geq -4 \\ -x-4\text{ , für } x < -4 \end{cases}$$

  Merke : Nur Quadrate können vollständig radiziert werden.

1.2 Rechenregeln für Quadratwurzeln

- $\boxed{\sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{ab}}}$

  Beispiel :

  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

• $\boxed{\sqrt{\mathbf{a}} : \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a:b}}}$ bzw. $\boxed{\dfrac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}}$

Beispiel :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1{,}5}$$

1.3 Anwendungen

• **Teilweises Radizieren**

Beispiele :

a) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{12} - 2\sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

• **Rationalmachen des Nennners**

Beispiele :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \dfrac{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{2} = \sqrt{2} + 1$

c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{12} + \sqrt{18}}{8 - 3} = \dfrac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{5} = 0{,}8\sqrt{3} + 0{,}6\sqrt{2}$

II. Quadratische Gleichungen

2.1 Quadratische Ergänzung

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Big\vert -1$	Isolierung
$2x^2 - 3x = -1 \quad \Big\vert :2$	Normierung
$x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \quad \Big\vert +\left(\frac{3}{4}\right)^2$	Quadratische Ergänzung
$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$	
$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$	Binomische Formel
$x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \quad \vee \quad x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	Radizieren
$x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 1$	Lösungen

2.2 Die Lösungsformel

- Für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ heißt

  $D = b^2 - 4ac$

  die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Es gilt

$D > 0$	Die quad. Gleichung besitzt die Lösungen $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ und $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.
$D > 0$	Die quad. Gleichung besitzt die Lösung $x = -\frac{b}{2a}$.
$D < 0$	Die quad. Gleichung besitzt keine Lösung.

Beispiel :

$2x^2 - 2x = 3$	
$2x^2 - 2x - 3 = 0$	Umformung
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 28$	Diskriminante
$x = \frac{2-\sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{2-2\sqrt{7}}{4} = 0{,}5-0{,}5\sqrt{7}$ $\vee$ $x = \frac{2+\sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} = 0{,}5+0{,}5\sqrt{7}$	Lösung

---

2.3 Sonderfälle

• Hat eine quadratische Gleichung die Form $ax^2 + c = 0$, dann löst man nach x^2 auf.

Beispiel : $2x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

• Hat eine quadratische Gleichung die Form $ax^2 + bx = 0$, dann faktorisiert man.

Beispiel :

$$2x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$$

• Man Gleichungen lassen sich durch Substitution auf quadratische Gleichungen zurückführen.

Beispiel :

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$	
$u := x^2$	Substitution
$u^2 - 4u + 3 = 0$	
$u = 1 \vee u = 3$	Lösung der substituierten Gleichung
$x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 1$ $\vee$ $x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$	Resubstitution

---

2.4 Der Satz von Vieta

- Hat die normierte quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{x_1 + x_2 = -p}} \text{ und } \boxed{\mathbf{x_1 \cdot x_2 = q}}$$

- Ist $T(x) = x^2 + px + q$ ein normierter quadratischer Term und besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt

$$T(x) = x^2 + px + q = \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right)$$

- Ist $T(x) = ax^2 + bx + c$ ein quadratischer Term und besitzt die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt

$$T(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right)$$

Beispiel :

$$T(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3}$$

Faktorsierung des Zählers :

$$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

Faktorisierung des Nenners :

$2x^2 - x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \lor x = \frac{3}{2}$ und damit $2x^2 - x - 3 = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2})$

Also

$$T(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3} = \frac{(2x - 3) \cdot (2x + 3)}{2 \cdot (x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2})} = \frac{(2x - 3) \cdot (2x + 3)}{(x + 1) \cdot (2x - 3)} = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

2.5 Quadratische Gleichungen mit Parametern

- Treten in einer quadratischen Gleichung neben der Lösungsvariablen x weitere Variablen auf, dann hängen die Lösungen der Gleichung den Werten dieser Variablen ab.

  Man nennt diese Variablen auch Parameter der Gleichung.

  Beispiel :

$x^2 + ax - 2a^2 = 0$	
$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2) = 9a^2 \geq 0$	Diskriminante
$x = \frac{a-3a}{2} = -a \vee x = \frac{a+3a}{2} = 2a$	Lösungen für $a \neq 0$
$x = 0$	Lösung für $a = 0$

  Beispiel :

  $x^2 - x + a - 1 = 0$

  Diskriminante : $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-1) = 5 - 4a$

  Damit ergibt sich :

$5 - 4a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4a > -5 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{5}{4}$	Die Gleichung besitzt 2 Lösungen.
$5 - 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4a = -5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{4}$	Die Gleichung besitzt 1 Lössung.
$5 - 4a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4a < -5 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{5}{4}$	Die Gleichung besitzt keine Lösung.