Quadratische Funktionen
==

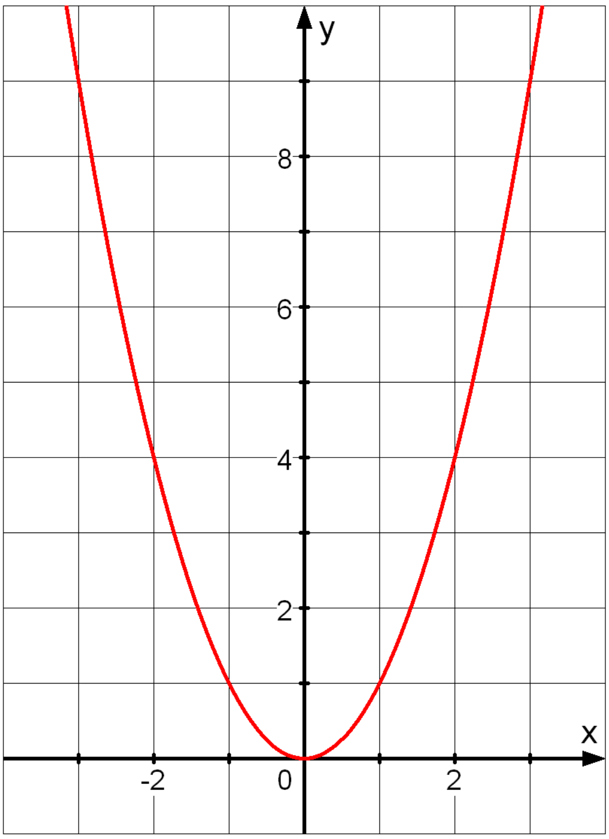
1. Die Normalparabel

Die Funktion $f : x \to y = x^2$, $D = \mathbb{R}$, heißt **Quadratfunktion**.

Wertetabelle :

x	0	0,5	1	2	3	4	$-0{,}5$	-1
$y = f(x) = x^2$	0	0,25	1	4	9	16	0,25	1

Graph der Funktion :



Eigenschaften der Quadratfunktion

1. Die Wertemenge W der Quadratfunktion ist die Menge der nichtnegativen, reellen Zahlen $W = \mathbb{R}_0^+$
2. Der Graph der Quadratfunktion heißt **Normalparabel**. Die Normalparabel

   a) besitzt den **Tiefpunkt** S(0; 0): Er heißt **Scheitel** der Parabel.

   b) ist **symmetrisch** zur y-Achse, weil $(-x)^2 = x^2$ ist.
3. Die Quadratfunktion bzw. ihr Graph ist für $x \le 0$ streng monoton fallend und für $x \ge 0$ streng monoton steigend.

Bemerkungen :

a) Eine mathematische Funktion f ist eine **Zuordnung**, die jedem x aus einer Menge D von Zahlen genau eine Zahl y zuordnet.

Man schreibt

$f : x \to y$

und sagt, die Funktion f bildet x auf y ab.

Die Menge **D** heißt die **Definitionsmenge** von f. Die Definitionsmenge einer Funktion f ist entweder vorgegeben oder muss so bestimmt werden, dass eine Zuordnung möglich ist.

Die Menge der zugeordneten y-Werte heißt **Wertemenge W** der Funktion.

b) Erhält man den y-Wert durch Einsetzen des x-Wertes in einen Term **f(x)**, dann schreibt man $y = f(x)$ und nennt diese Gleichung die **Funktionsgleichung** der Funktion.

Für die Quadratfunktion ist $y = x^2$, d. h. der Funktionsterm ist $f(x) = x^2$.

c) Die Punkte $\left(x \,\middle|\, y\right)$ mit $y = f(x)$, bilden den **Graphen** der Funktion.

d) Geht man auf der x-Achse von links nach rechts und werden die zugeordneten y-Werte kleiner, dann heißt die Funktion f bzw. ihr Graph streng monoton fallend. Werden die y-Werte größer, dann nennt man die Funktion bzw. ihren Graphen streng monoton steigend.

Beispiel :

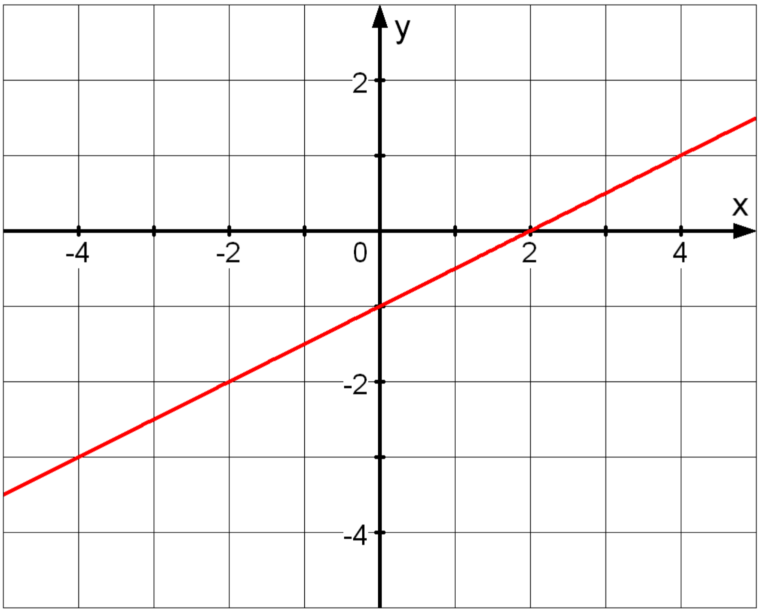
$f : x \to y = \frac{1}{2}x - 3$ mit $D = \mathbb{R}$

ist eine **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine Gerade:

Wertetabelle :

x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x - 1$	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$

Graph :



Man nennt

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

die Gleichung einer Geraden mit dem Steigungsfaktor $m = \frac{1}{2}$ und dem y-Abschnitt $t = -1$.

Übungsaufgaben :

---

1. Zeichne die Graphen der Funktionen

   a) $f : x \to y = -2x + 3$ b) $f : x \to y = \frac{2}{3}x$ c) $f : x \to y = \frac{3}{2}$

   mit $D = \mathbb{R}$ in ein Koordinatensystem.

---

2. Zeichne die beiden Geraden

   $g : y = -x + 3$ und $h : y = \frac{3}{2}x - 1$

   in ein gemeinsames Koordinatensystem und und entnimm der Zeichnung die Koordinaten des Schnittpunkts.

   Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts auch rechnerisch.

---

3. Zeichne die Graphen der Funktionen

   $f_1 : x \to y = x^2$ und $f_2 : x \to y = \frac{2}{3}x + 3$ mit der gemeinsamen Defintionsmenge $D = \mathbb{R}$

   in ein gemeinsames Koordinatensystem und entnimm der Zeichnung die Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen.

   Versuche die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen auch rechnerisch zu bestimmen.

---

2. Die allgemeine quadratische Funktion

Eine Funktion

$f: x \to y = ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ D = \mathbb{R}$

heißt **quadratische Funktion**.

Beispiele :

a) $f: x \to y = x^2 - 2x + 3$ ist eine quadratische Funktion mit $a = 1$, $b = -2$ und $c = 3$.

b) $f: x \to y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ ist eine quadratische Funktion mit $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ und $c = -3$.

b) $f: x \to y = (x-1)^2$

ist wegen

$y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

eine quadratische Funktion mit $a = 1$, $b = -2$ und $c = 1$.

Wir ermitteln das Aussehen der Graphen quadratischer Funktionen

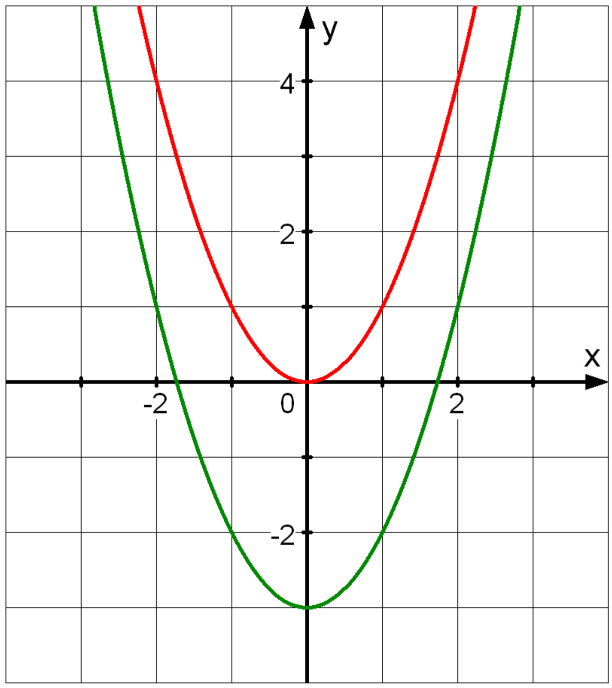
A Die Funktionen $\mathbf{f : x \rightarrow y = x^2 + c}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

Beispiel :

$f : x \rightarrow y = x^2 - 3$

Wertetabelle :

x	0	0,5	1	2	3	$-0{,}5$	-1
x^2	0	0,25	1	4	9	0,25	1
$y = x^2 - 3$	-3	$-2{,}75$	-2	1	6	$-2{,}75$	-2



Der Graph der Funktion

$f : x \rightarrow y = x^2 + c$ mit $D = \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

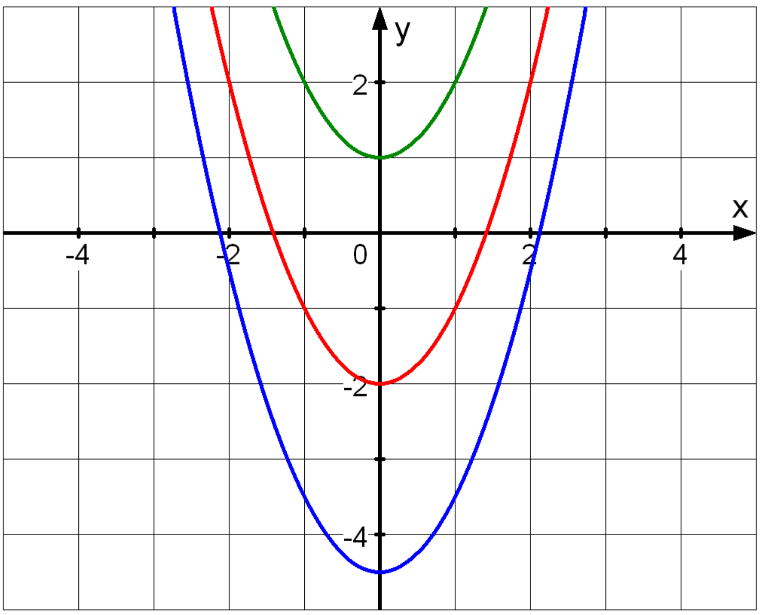
ist eine mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel.

Der Scheitel ist gegeben durch $S\left(0 \,\middle|\, c\right)$ und die Wertemenge von f ist $W = [c; \infty[$.

Übungsaufgaben :

---

1. Gib die Gleichungen der Funktionen mit den gezeichneten Graphen an.



---

2. Zeichne die Graphen der Funktionen

$f_1 : x \rightarrow y = x^2 + 2$ und $f_2 : x \rightarrow y = -2x + 4$

mit der gemeinsamen Defintionsmenge $D = \mathbb{R}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und entnimm der Zeichnung die Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen.

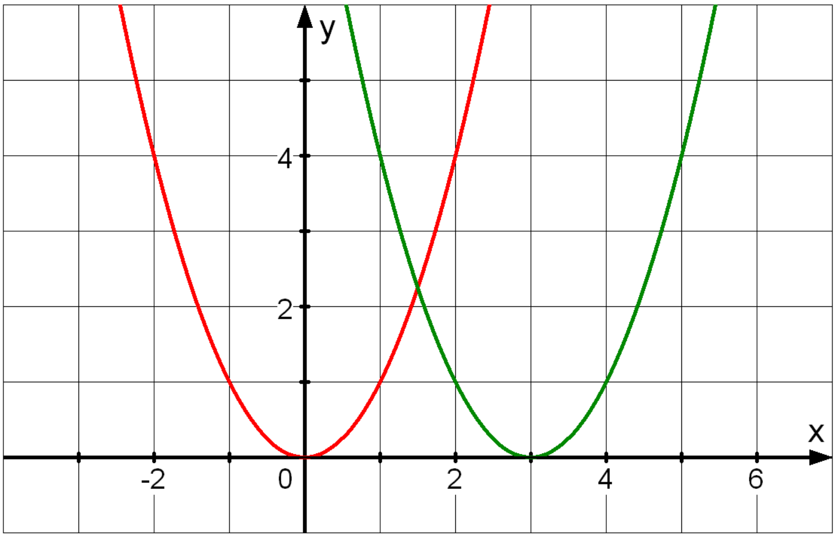
Versuche dieKoordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen auch rechnerisch zu bestimmen.

B Die Funktionen $\mathbf{f : x \rightarrow y = (x - s)^2}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$

Beispiel :

$f : x \rightarrow (x-3)^2$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$x-3$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (x-3)^2$	9	4	1	0	1	4	9	16



Der Graph der Funktion

$f : x \rightarrow y = (x-s)^2$ mit $D = \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$

ist eine mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel.

Der Scheitel $S\left(s \mid 0\right)$ ist Tiefpunkt des Graphen und die Wertemenge der Funktion von f

ist $W = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$.

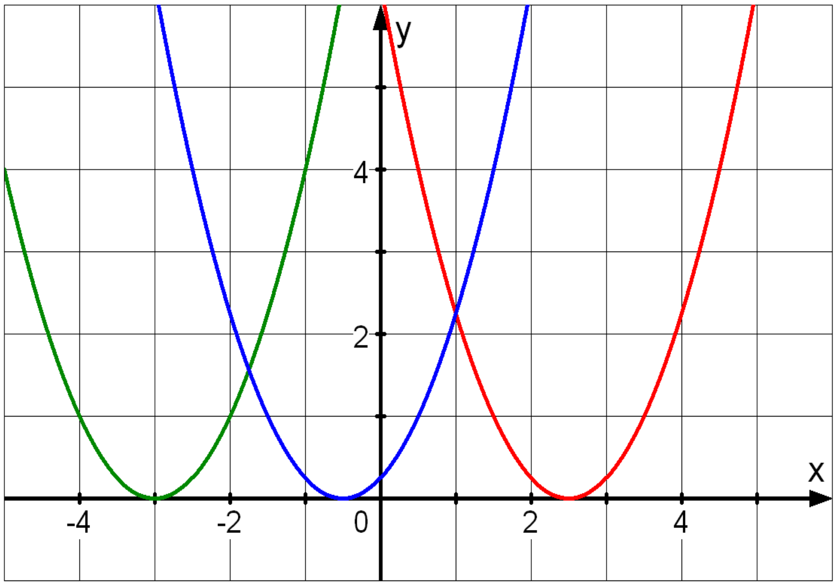
Übungsaufgaben :

---

1. Gib die Gleichungen der Funktionen mit den gezeichneten Graphen in der Form

$$y = x^2 + px + q$$

an.



---

2. Zeichne die Graphen der Funktionen

a) $f: x \rightarrow y = (x-2{,}5)^2$ b) $f: x \rightarrow y = (x+1)^2$

c) $f: x \rightarrow y = (x+4)^2$ d) $f: x \rightarrow y = x^2 - 3x + 2{,}25$

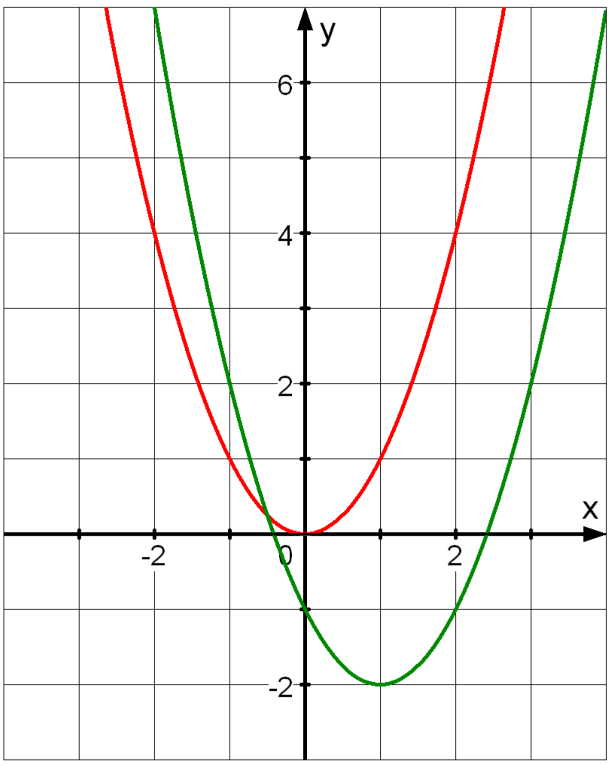
mit $D = \mathbb{R}$ in ein Koordinatensystem.

C Die Funktion $\mathbf{f : x \mapsto (x - s)^2 + t}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $s, t \in \mathbb{R}$.

Beispiel :

$f : x \to y = (x-1)^2 - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x-1$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x-1)^2 - 2$	12	7	2	-1	-2	-1	2	7



Der Graph der Funktion

$f: x \to y = (x-s)^2 + t$ mit $D = \mathbb{R}$ und $s, t \in \mathbb{R}$

ist eine mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel.

Der Scheitel $S\left(s \,\middle|\, t\right)$ ist Tiefpunkt des Graphen und die Wertemenge von f ist $W = [t; \infty[$.

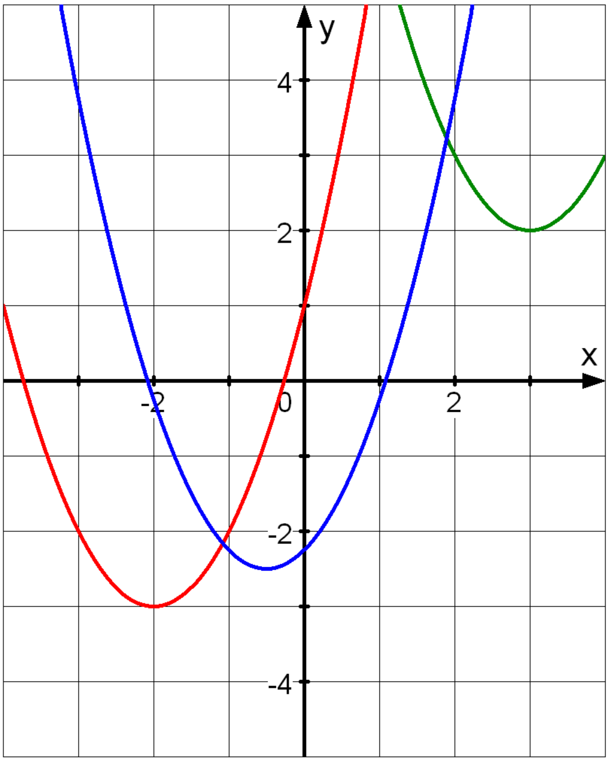
Übungsaufgaben :

---

1. Gib die Gleichungen der Funktionen mit den gezeichneten Graphen in der Form

$y = x^2 + px + q$

an.



---

2. Zeichne die Graphen der Funktionen

a) $f: x \to y = (x+2{,}5)^2 - \frac{1}{2}$ b) $f: x \to y = (x-1{,}5)^2 + 1{,}5$

c) $f: x \to y = (x+2)^2 + 1$ d) $f: x \to y = (4-x)^2 - 2$

mit $D = \mathbb{R}$ in ein Koordinatensystem.

---

3. Wie lautet die Funktionsgleichung einer Funktion

$f: x \to y = x^2 + px + q$ mit $D = \mathbb{R}$

und der Wertemenge $W = [-5; \infty[$, deren Graph kongruent zur Normalparabel ist und durch den Punkt $P\left(-2 \mid -1\right)$ geht ?

D Die Funktion $\mathbf{f : x \to y = x^2 + px + q}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{R}$.

Beispiel :

$f : x \to y = x^2 - 6x + 5$

Umformung des Funktionsterms :

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$

Ergebnis :

Der Graph der Funktion ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(3 \,\middle|\, -4\right)$.

Allgemeine Rechnung :

Für

$f : x \to y = x^2 + px + q$

ergibt sich

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

Satz :

Der Graph der Funktion

$f : x \to y = x^2 + px + q$,$D = \mathbb{R}$;

ist eine mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} \\ q - \frac{p^2}{4} \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel mit dem Scheitel

$S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, q - \frac{p^2}{4}\right)$ als Tiefpunkt und der Wertemenge $W = [q - \frac{p^2}{4}; \infty[$

Übungsaufgaben :

---

1. Ermittle den Scheitel und die Wertemenge der Funktionen

a) $f: x \to y = x^2 + 8x + 10$ b) $f: x \to y = x^2 - x - 2$

c) $f: x \to x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16}$ d) $f: x \to x^2 - 1{,}2x - 0{,}64$

---

2. Der Graph der Funktion $f: x \to y = x^2 + 4x - 5$ wird mit dem Vektor

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

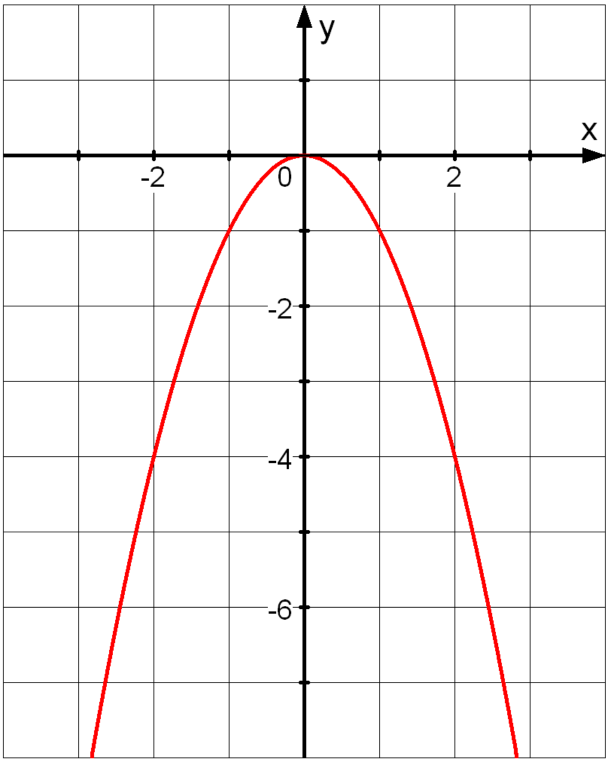
verschoben. Wie lautet die jeweils Funktionsgleichung der Funktion, welche die verschobene Parabel als Graphen besitzt ?

---

3. Bestimme die Wertemenge der Funktion mit der angegebenen Funktionsmenge.

a) $f: x \to y = x^2 + x + 1$ mit $D = [-3; 2]$ b) $f: x \to y = x^2 - 3x + 1$ mit $D = [-2; 1]$

E Die Funktion $\mathbf{f : x \rightarrow -x^2}$ mit $D = \mathbb{R}$**.**



$f : x \rightarrow y = -x^2$ mit $D = \mathbb{R}$

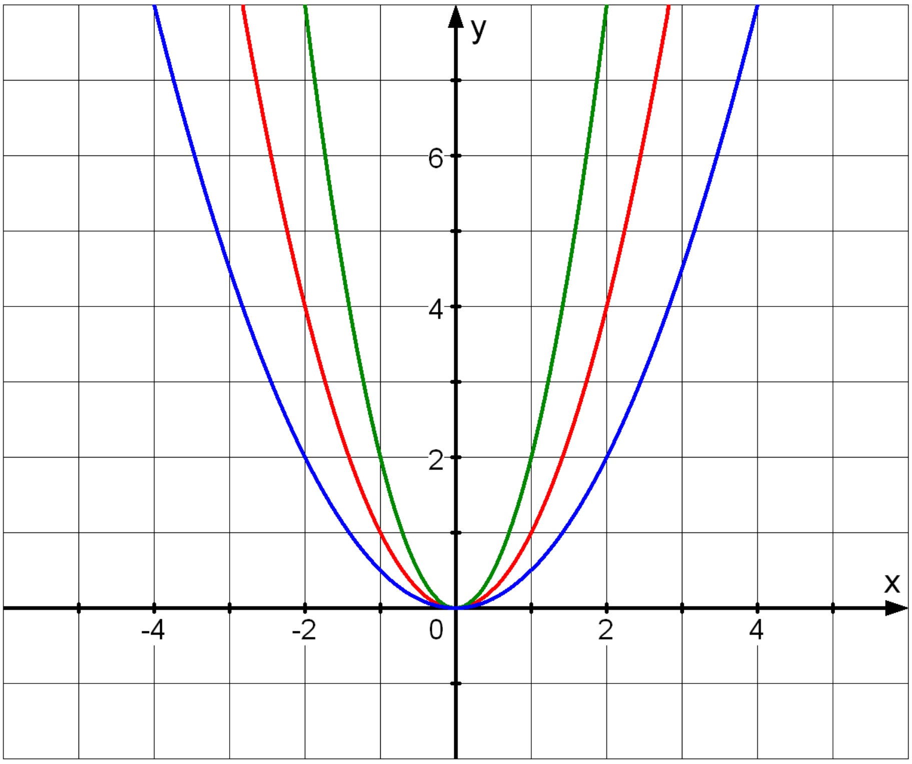
ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S\left(0 \,\middle|\, 0\right)$. Der Scheitel ist Hochpunkt der Parabel und die Wertemenge von f ist $W = \mathbb{R}_0^- =]-\infty; 0]$.

Man erhält den Graphen von f durch Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse bzw. durch Punktspiegelung der Normalpaarbel am Koordinatennullpunkt $O\left(0 \,\middle|\, 0\right)$.

F Die Funktion $\mathbf{f : x \rightarrow ax^2}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Beispiel :

$f_1 : x \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$ und $f_2 : x \rightarrow y = 2x^2$



Der Graph der Funktion

$f : x \rightarrow y = ax^2$ $D = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$

ist eine nach oben $(a > 0)$ bzw. nach unten geöffnete $(a < 0)$

und

verbreiterte $(|a| < 1)$ bzw. gestauchte $(|a| > 1)$ Parabel.

Ihr Graph geht durch zentrische Streckung an $O\left(0 \,\middle|\, 0\right)$ mit dem Streckungsfaktor $m = \frac{1}{a}$

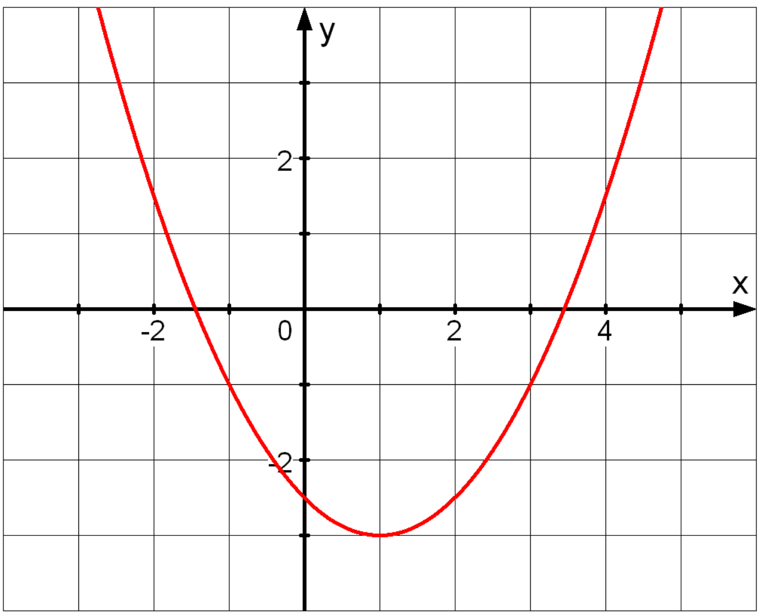
aus der Normalparabel hervor.

F Die Funktion $\mathbf{f : x \rightarrow a(x-s)^2 + t}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a, s, t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Beispiel :

$$f : x \rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x-1$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}(x-1)^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$	5	1,5	-1	$-2,5$	-3	$-2,5$	-1	1,5



Der Graph der Funktion

$f : x \to y = a(x - s)^2 + t$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a, s, t \in \mathbb{R}, a \neq 0$

geht aus der Normalparabel durch zentrische Streckung an $O\left(0 \,\middle|\, 0\right)$ mit dem Streckungs-

faktor $m = \frac{1}{a}$ und eine anschließende Verschiebung mit demVektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ hervor.

Der Scheitel hat die Koordinaten $S\left(s \,\middle|\, t\right)$ und ist Tiefpunkt $(a > 0)$ bzw. Hochpunkt $(a < 0)$

des Graphen.

G Die Funktion $\mathbf{f : x \rightarrow y = ax^2 + bx + c}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Beispiel :

$f : x \rightarrow y = 2x^2 - 4x + 3$

Umformung :

$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3 =$

$2(x^2 - 2x + 1^2) - 2 \cdot 1^2 + 3 = 2(x-1)^2 + 2$

Allgemeine Rechnung :

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c =$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Satz :

Der Graph der Funktion

$f : x \rightarrow y = ax^2 + bx + c$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

geht aus der Normalparabel durch zentrische Streckung an $O(0 \mid 0)$ mit dem Streckungs-

faktor $m = \frac{1}{a}$ und eine anschließende Verschiebung mit demVektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ c - \frac{b^2}{4a} \end{pmatrix}$ hervor.

Der Scheitel S ist gegeben durch $S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.