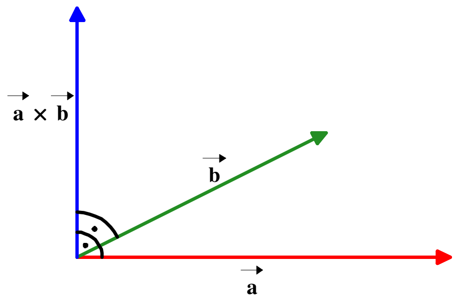
VIII. Vektor- und Spatprodukt

8.1 Das Vektorprodukt



Definition :

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ bzgl. einer **ONB** (**Orthonormalbasis**) heißt der Vektor

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

das **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Satz :

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ voneinander linear abhängig, dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

2. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, dann

a) steht der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht

und

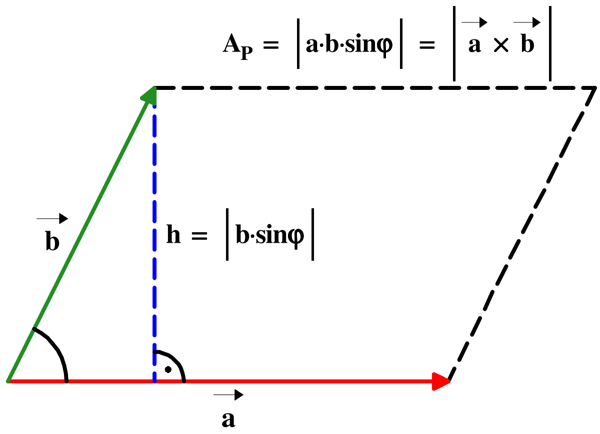
die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein **Rechtssystem**.

b) Der Betrag des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich der Flächenmaßzahl des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beweis :

1. und 2. a) Nachrechnen bzw. überprüfen

2.



Es ist $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = A_P^2$$

Folgerung :

Für den Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt

$$\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Beispiel :

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2 | 5 | − 1), B(3 | 7 | 2), C(6 | 4 | 2)

Vektorprodukt : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 3 \\ 12 - 3 \\ -1 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Inhalt des Dreiecks ABC : $A = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 9^2 + (-9)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts) :

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

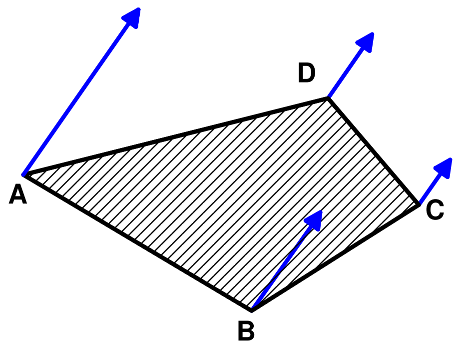
(3) $r \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times r \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, $r \in \mathbb{R}$

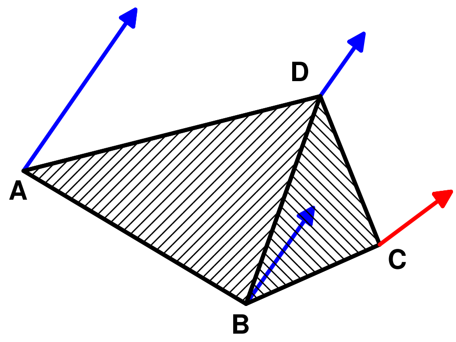
(4) $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$

(5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

8.2 Anwendungen des Vektorprodukt

8.2.1 Ebene und nichtebene Vierecke





Satz :

Ein Viereck ABCD im Raum ist genau dann eben, wenn die aus den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{DA}$ gebildeten Vektorprodukte

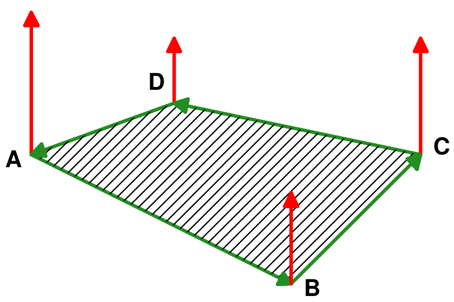
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{AB}$

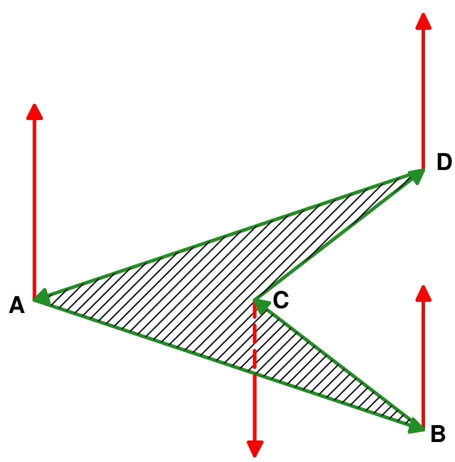
parallele(**kollineare**) d.h. paarweise linear abhängige Vektoren sind.

8.2.2 Konvexe und konkave Vierecke

Definition :

Ein ebenes Viereck heißt **konvex**, wenn die Verbindungsstrecke zweier im Innern des Vierecks liegenden Punkte ebenfalls im Innern des Vierecks liegt.





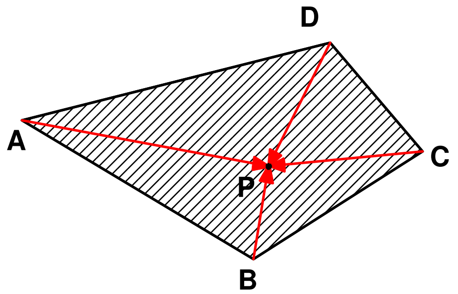
Satz :

Ein Vierecke ABCD im Raum ist genau dann **konvex**, wenn die aus den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$und $\overrightarrow{DA}$ gebildeten Vektorprodukte

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{AB}$

gleichsinnig parallel sind.

8.2.3 Relative Lage eines Punktes zu einem Viereck



Satz :

Ein Punkt P, der mit einem konvexen Viereck ABCD in einer Ebene enthalten ist, liegt

a) innerhalb

b) auf dem Rand

c) außerhalb

des Vierecks, wenn für die aus den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BP}$; $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CP}$ sowie $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{DP}$ gebildeten Vektoren

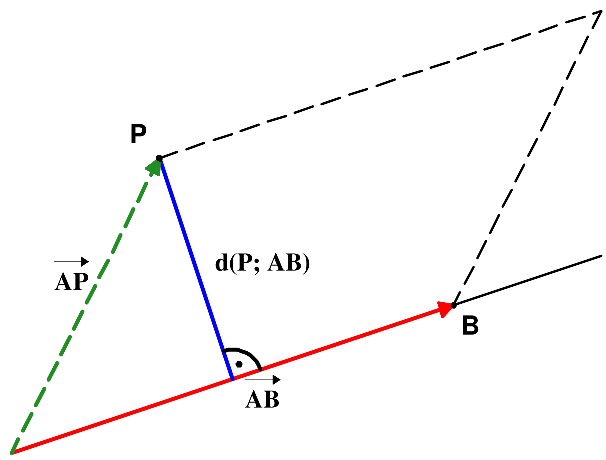
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DP}$ und $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DP}$ gilt :

a) Alle Vektoren sind gleichsinnig parallel und kein Vektor ist gleich dem Nullvektor.

b) Ein Vektor ist gleich dem Nullvektor

c) Es liegt sowohl gleichsinnige als auch ungleichsinnige Parallelität vor und kein Vektor ist gleich dem Nullvektor.

8.2.4 Abstand eines Punktes von einer Geraden



Satz :

Für den Abstand eines Punktes P von einer Geraden AB durch die Punkte A und B bzw. einer Geraden g mit dem Aufpunkt A und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{d(P;\,AB)} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|}} \text{ bzw. } \boxed{\mathbf{d(P;\,g)} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{v}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}}\right|}}$$

Beweis :

Der Flächeninhalt F des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich

$$F = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|.$$

Wählt man als Grundlinie $g = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, dann ist die Höhe $h = \frac{F}{g} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ der Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

Mit $\left|\vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ folgt die zweite Formel.

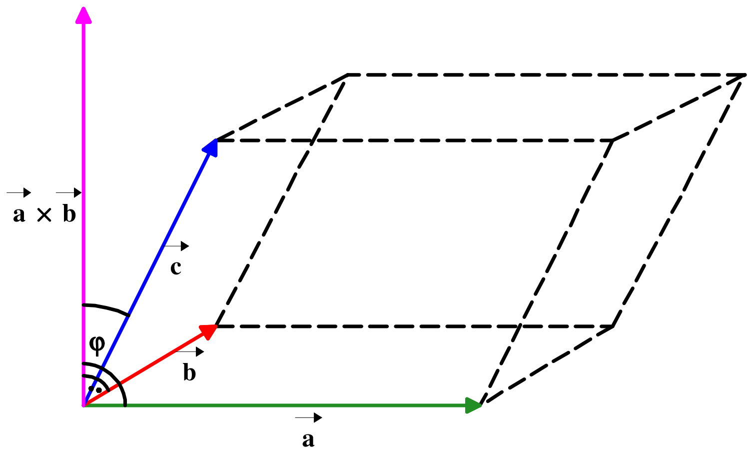
Analog zeigt man :

Satz :

Der Abstand zweier paralleler Geraden g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{u}$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{d(g\,;\,h) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}}} \text{ bzw. } \boxed{\mathbf{d(g\,;\,h) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}}}$$

8.3 Das Spatprodukt



Für das Volumen des Spats gilt

$$V = G \cdot h = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \cdot \left| \vec{c} \right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a} \times \vec{b} \, , \, \vec{c} \,) = \left| (\vec{a} \times \vec{b} \,) \cdot \vec{c} \,\right|$$

Definition :

Unter dem **Spatprodukt** dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ versteht man die reelle Zahl

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b} \,) \cdot \vec{c} \;=\; \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c} \,)}$$

Ihr Betrag ist gleich dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

Bzgl einer **ONB** gilt :

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b} \,) \cdot \vec{c} \;=\; \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Folgerung :
Für das Volumen eines von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Tetraeders gilt

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b} \,) \cdot \vec{c} \,\right| = \left| \frac{1}{6} \left| \vec{a} \, , \, \vec{b} \, , \, \vec{c} \,\right| \right|}$$

Beispiel :

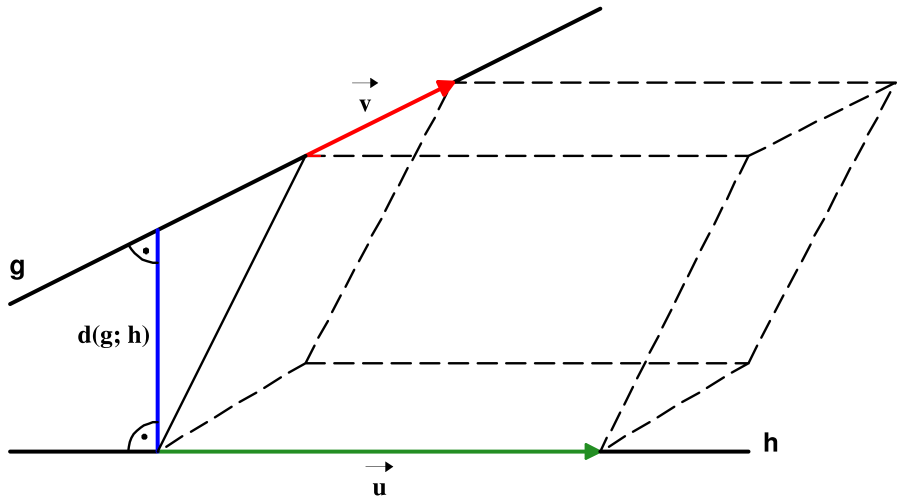
Welches Volumen hat der Tetraeder ABCD mit

$$A\left(1\,\middle|\,1\,\middle|\,1\right),\ B\left(2\,\middle|\,3\,\middle|\,3\right),\ C\left(4\,\middle|\,5\,\middle|\,-1\right),\ D\left(6\,\middle|\,3\,\middle|\,3\right)?$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|8+12-20-40+4-12\right| = 8$$

Anwendung :

a) Abstand windschiefer Geraden



Satz :

Für den Abstand zweier windschiefer Geraden (Länge der gemeinsamen Lotstrecke der Geraden)

$g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{v}$ und $h:\ \vec{x} = \vec{a} + \mu\cdot\vec{v}$

gilt :

$$\boxed{\mathbf{d(g\,;h)} = \frac{\left\|\left[\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}},\ \vec{\mathbf{u}},\ \vec{\mathbf{v}}\right]\right\|}{\left|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\right|}}$$

Beweis :

Für das Volumen des von $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Spats gilt $V = \left| \left| \vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v} \right| \right|$.

Für die Grundfläche G gilt $G = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right|$.

Die Höhe $h = \frac{V}{G}$ ist genau der Abstand der beiden windschiefen Geraden.

b) Abstand eines Punkte von einer Ebene

Analog zeigt man :

Satz :

Ein Punkt P hat von der Ebene E(ABC)durch die Punkte A, B und C den Abstand

$$\boxed{\mathbf{d(P; ABC)} = \frac{\left| \left| \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AP}} \right| \right|}{\left| \overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}} \right|}}$$